Devoir 1

Exercice 1 : série de Fourier

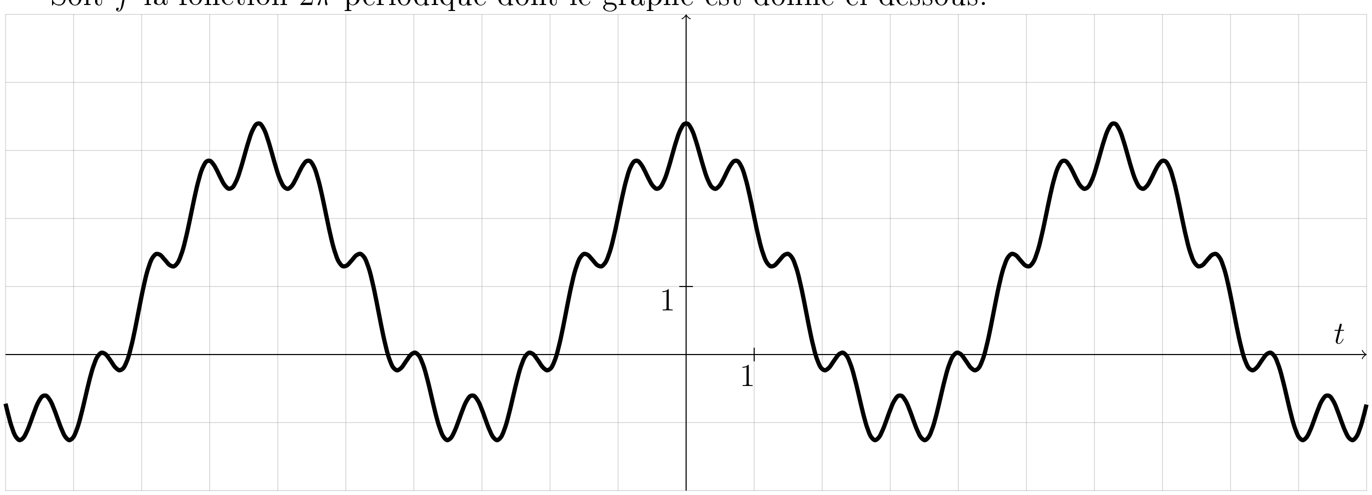
Soit f la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi,\pi[$ par $f(x) = \mathbf{1}_{[0,\pi[}(x) - \mathbf{1}_{]-\pi,0[}(x)$.

1. Calculer la série de Fourier de f_1.

   Soit g la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi,\pi[$ par $g(x) = x$.
2. Calculer la série de Fourier de g.
3. Trouver et représenter la fonction h dont la série de Fourier est $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin(nx)$.
4. En s'autorisant à intégrer ou dériver sous le signe somme, trouver la fonction ℓ dont la série de Fourier est $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\cos(nx)$.

Exercice 2 : spectre

Soit f la fonction 2π-périodique dont le graphe est donné ci-dessous.



1. Déterminer et représenter approximativement le spectre de f.

   Soit g la fonction définie par $g(t) = \cos(10t)f(t)$.
2. Représenter l'allure du graphe de g.
3. Exprimer les coefficients de Fourier $a_n(g)$ en fonction des coefficients $a_{10-n}(f)$ et $a_{10+n}(f)$ de f.
4. Représenter le spectre de g.

Série de Fourier d'une fonction 2π-périodique f : $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$ avec

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

Formule trigonométrique : $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$.