Devoir 1

Exercice 1 : série de Fourier

Soit f la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi,\pi[$ par $f(x) = \mathbf{1}_{[0,\pi[}(x) - \mathbf{1}_{]-\pi,0[}(x)$.

1. Calculer la série de Fourier de f_1.

   La fonction f est la fonction créneau, valant alternativement -1 et 1. Elle est impaire, donc ses coefficients de Fourier a_0 et a_n sont nuls. Et pour tout $n \geqslant 1$,

   $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\times\sin(nx)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\frac{-\cos(n\pi)+\cos(0)}{n} = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n).$$

   Ainsi

   $$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)\sin(nx).$$

   Soit g la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi,\pi[$ par $g(x) = x$.

2. Calculer la série de Fourier de g.

   Il s'agit encore d'une fonction impaire. À l'aide d'une intégration par partie, on obtient

   $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\mathrm{d}x = -\frac{2(-1)^n}{n}.$$

   Ainsi,

   $$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{2(-1)^n}{n}\sin(nx).$$

3. Trouver et représenter la fonction h dont la série de Fourier est $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin(nx)$.

   Les coefficients de Fourier de h valent $b_n = \frac{1}{n}$. Ils ressemblent aux coefficients de f et g. Plus précisément, on remarque que pour tout n, $\frac{1}{n} = \frac{1}{2}(\pi\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n) + \frac{2(-1)^n}{n})$, donc $b_n(h) = \frac{1}{2}(\pi b_n(f) - b_n(g))$. On en déduit que $h = \frac{1}{2}(\pi f - g)$: ainsi h est la fonction périodique définie sur $]-\pi,\pi[$ par

   $$h(x) = \frac{1}{2}(\pi - x).$$

4. En s'autorisant à intégrer ou dériver sous le signe somme, trouver la fonction ℓ dont la série de Fourier est $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nx)$.

Si on s'autorise à intégrer sous le signe somme la fonction h, on obtient une de ses primitives sous forme d'une série de Fourier :

$$\int h(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nx).$$

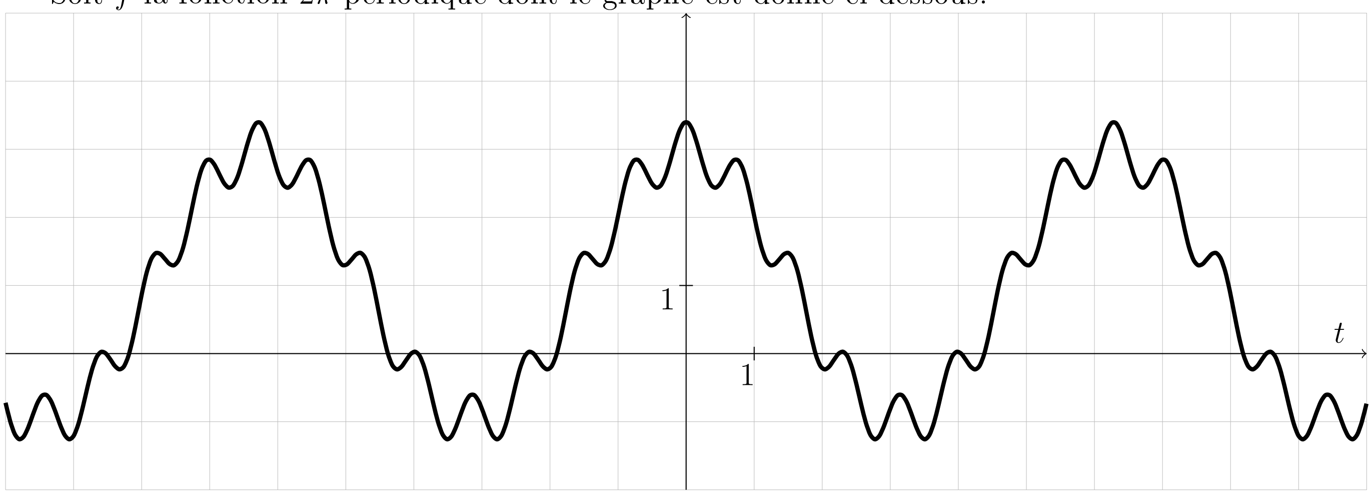
les primitives de h sont les fonctions périodiques de la forme $x \mapsto \frac{1}{2}(\pi x - \frac{x^2}{2}) + cste$ sur $]-\pi, \pi[$. D'après la série de Fourier ci-dessus, la fonction recherchée a une valeur moyenne $a_0 = 0$. Il doit donc en être de même pour notre fonction. Comme

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\pi x - \tfrac{x^2}{2}) + c \;\mathrm{d}x = c - \frac{\pi^2}{12}.$$

Il faut donc prendre $c = \frac{\pi^2}{12}$.

Exercice 2 : spectre

Soit f la fonction 2π-périodique dont le graphe est donné ci-dessous.



1. Déterminer et représenter approximativement le spectre de f.

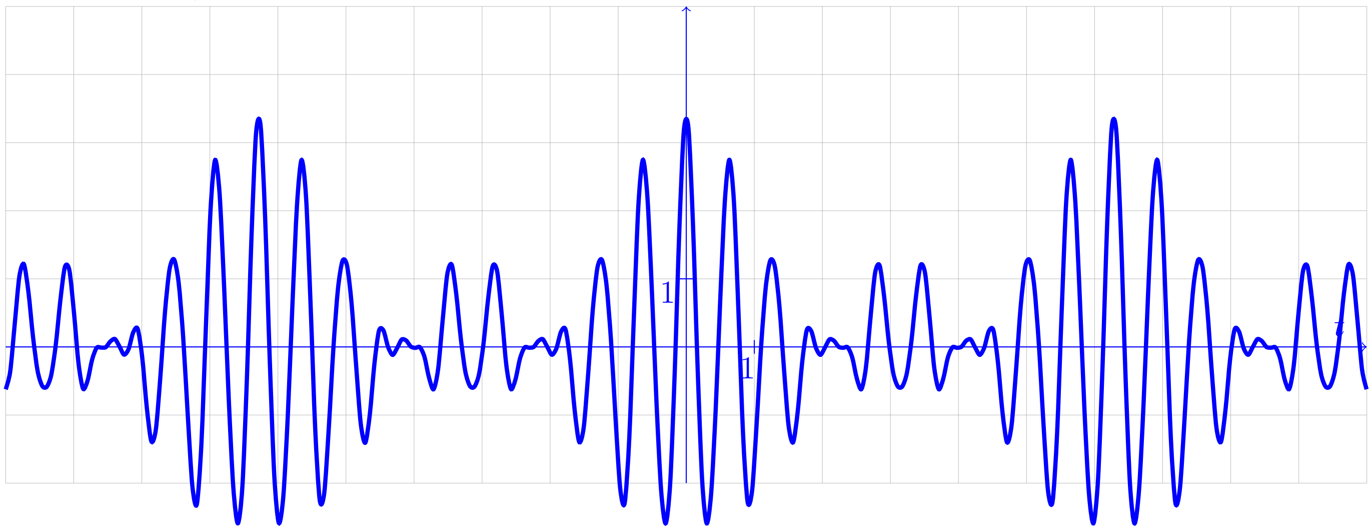
La fonction f est paire, ses coefficients b_n sont nuls. Sa valeur moyenne vaut approximativement $a_0 \approx 1$. Elle est constituée d'une basse fréquence assez élevée et d'une fréquence plus haute de faible intensité. La basse fréquence a une amplitude de l'ordre de $a_1 \approx 2$. Il y a 8 petites oscillations sur une période, d'intensité de l'ordre de $0,4$, donc $a_8 \approx 0,4$. Nous avons ainsi déterminé le spectre de f et la fonction peut être approchée par

$$f(x) \approx 1 + 2\cos(x) + 0,4\cos(8x).$$

Soit g la fonction définie par $g(t) = \cos(10t)f(t)$.

2. Représenter l'allure du graphe de g.

   Pour se faire une idée du graphe de g, il faut voir g comme la fonction f multipliée par une fonction qui oscille rapidement entre -1 et 1. L'enveloppe de son graphe ressemble au graphe de f, avec beaucoup d'oscillations.



3. Exprimer les coefficients de Fourier $a_n(g)$ en fonction des coefficients $a_{10-n}(f)$ et $a_{10+n}(f)$ de f.

   Calculons

$$a_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(10t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\tfrac{1}{2}(\cos((10+n)t)+\cos((10-n)t))\mathrm{d}t$$
$$= \tfrac{1}{2}a_{10-n}(f) + \tfrac{1}{2}a_{10+n}(f).$$

4. Représenter le spectre de g.

   Les seuls coefficients de f non nuls sont a_0, a_1 et a_8. D'après la question précédente, les coefficients non nuls de g seront :
   $a_{10}(g) = \frac{1}{2}a_0(f) + \frac{1}{2}a_20(f) \approx 0,5$
   $a_9(g) = \frac{1}{2}a_1(f) + \frac{1}{2}a_19(f) \approx 1$
   $a_2(g) = \frac{1}{2}a_8(f) + \frac{1}{2}a_12(f) \approx 0,2$
   $a_{11}(g) = \frac{1}{2}a_1(f) + \frac{1}{2}a_21(f) \approx 1$
   $a_{18}(g) = \frac{1}{2}a_8(f) + \frac{1}{2}a_28(f) \approx 0,2$

   Le spectre de g est obtenu en reproduisant le spectre de f de façon symétrique à droite et à gauche de 10 en le divisant par 2.

Série de Fourier d'une fonction 2π-périodique f : $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$ avec

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

Formule trigonométrique : $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$.