FipGE3, Mathématiques *mars 2016*

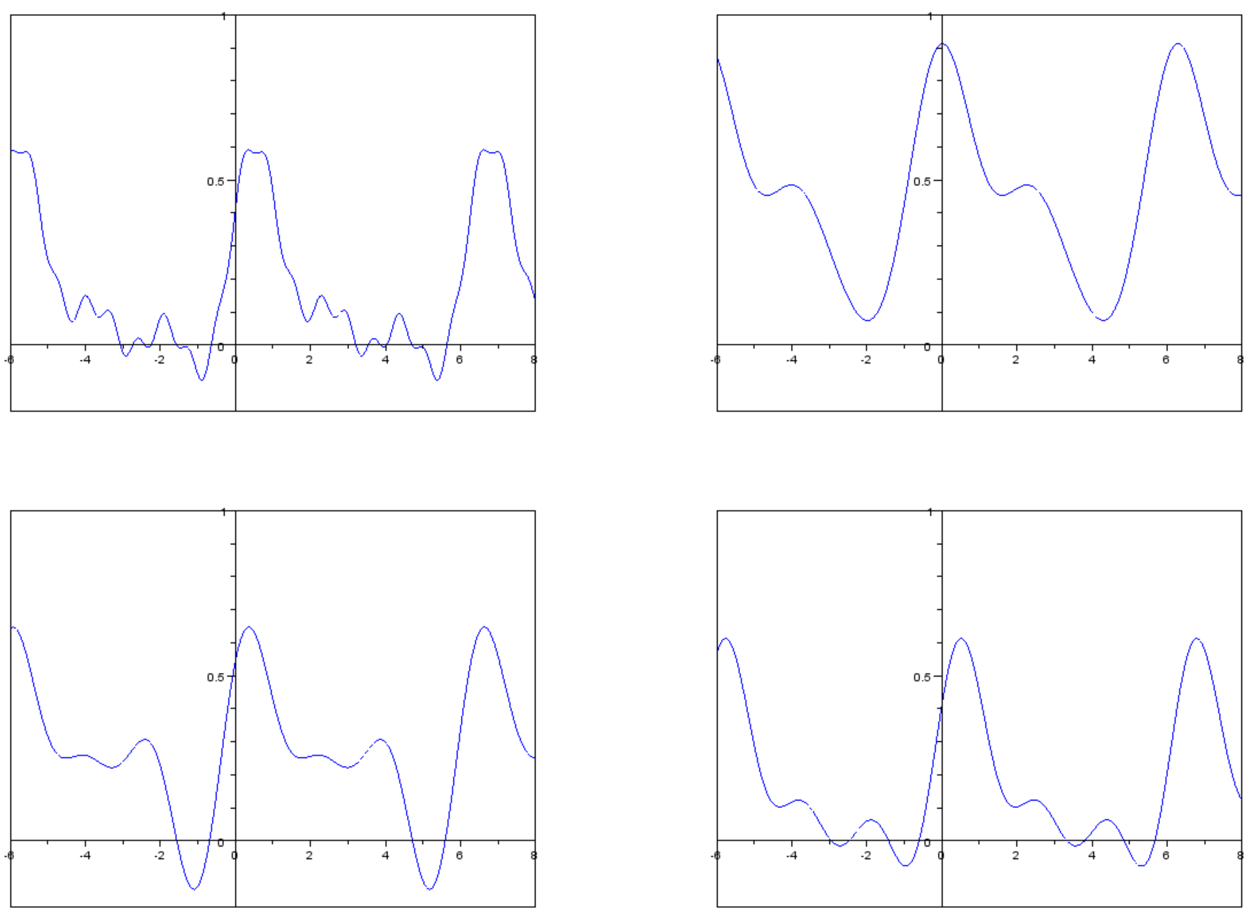
Devoir 1

Exercice 1 : série de Fourier (4 points)

On considère la fonction f 2π-périodique définie sur $]0, 2\pi[$ par $f(x) = e^{-x}$.

1. Représenter le graphe de f.
2. Calculer les coefficients de Fourier complexes c_n de f et écrire la série de Fourier de f. *On veillera à simplifier les termes $e^{2i\pi n}$ dans les expressions des coefficients de Fourier.*
3. La série converge-t-elle en tout point vers f ? La convergence est-elle rapide ?
4. Retrouver parmi les graphes ci-dessous le graphe de la somme partielle $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=-3}^{3} c_n e^{inx}$.

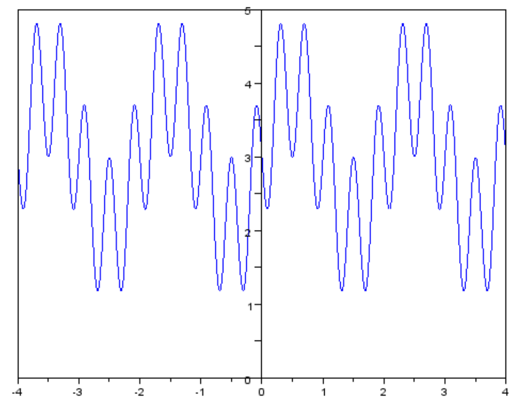
   Justifier votre réponse.



Exercice 2 : estimation de coefficients de Fourier **(3 points)**

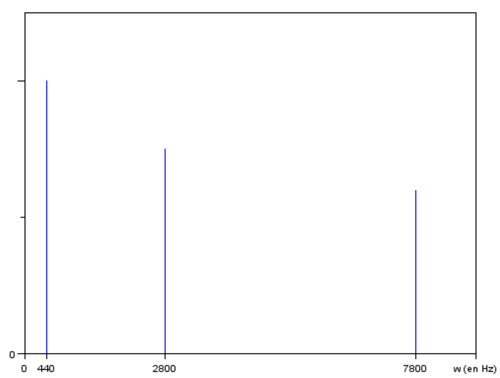
On considère la fonction g dont le graphe est ci-contre.

1. Quelle est la période de g ?
2. Sachant que g n'est composée que de deux fréquences différentes et que tous ses coefficients de Fourier sont des nombres entiers, estimer ces derniers graphiquement et déterminer la fonction g.



Exercice 3 : spectre du diapason **(3 points)**

On fait vibrer un diapason en le frappant. L'analyse mathématique de cette vibration permet de déterminer le spectre du son émis par le diapason donné ci-dessous. (La fréquence fondamentale est bien celle du La à 440 Hz.)



1. Décrire ce spectre. Qu'a-t-il de particulier par rapport aux spectres de Fourier qu'on rencontre haituellement ?
2. Peut-on dire que le diapason a un son pur ?
3. Si on tient compte des frottements de l'air, la vibration du diapason sera atténuée au cours du temps. L'étude mathématique permet alors de montrer que chaque composante de la vibration de fréquence ω est au bout d'un temps t (en secondes) multipliée par $e^{-\frac{\omega t}{1000}}$.
   Représenter l'allure du spectre du diapason au bout d'une seconde.
   Quelques valeurs numériques : $e^{-0.5} \approx 0,6 \quad e^{-3} \approx 0,05$.
4. Peut-on dire que le diapason a un son pur ?