Contrôle 1

Les documents et calculatrices sont interdits.
Toutes les réponses doivent être justifiées et correctement rédigées.
Barême donné à titre indicatif : 11-4-5.

Exercice 1

Soit f la fonction 2π-périodique définie pour $x \in [-\pi, \pi]$ par $f(x) = 2\pi - 2|x|$.

1. Représenter le graphe de f.
2. Décrire, avant de faire les calculs, la convergence de la série de Fourier de f vers f : sera-t-elle rapide ? La série convergera-t-elle en tout point x vers $f(x)$?
3. Calculer les coefficients de Fourier de f et écrire la série de Fourier de f.
4. Représenter les graphes des fonctions $x \mapsto a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x)$ et $x \mapsto a_0 + \sum_{n=1}^{3} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ où les a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de f.

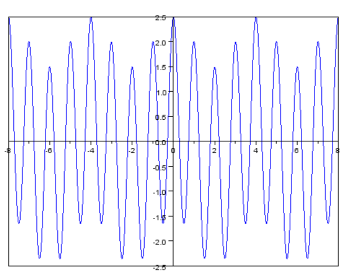
Rappel : les coefficients de Fourier d'une fonction 2π-périodique f sont donnés par

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \qquad \forall n \geq 1, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \qquad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

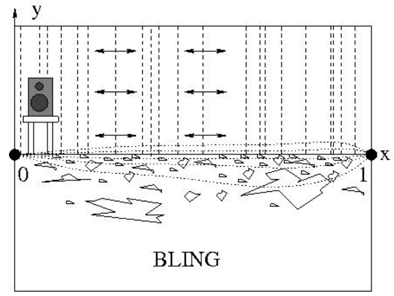
La série de Fourier de f est alors la fonction $x \mapsto a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$.

Exercice 2

Déterminer approximativement le spectre de Fourier de la fonction dont le graphe est ci-dessous. On expliquera brièvement comment les différents coefficients ont été trouvés.



Exercice 3 : Problème de voisinage.



Mon voisin du dessus écoute de la musique trop fort. L'onde sonore qui en découle modifie la pression de l'air dans son salon, pression qui s'exerce sur mon plafond et le fait vibrer. C'est la vibration du plafond qui permet de transmettre à la pièce du dessous (mon salon) une partie du son initial.
Le problème se modélise à l'aide de l'équation des ondes. Nous ne la résoudrons pas dans le cas présent et nous contenterons d'en étudier la solution.

Les sons composant la musique du voisin sont donnés par des fonctions de la forme

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin(n\pi x)\cos(n\pi\mu t),$$

où μ est un nombre réel positif et les B_n sont des paramètres réels. À t fixé, on reconnaît une série de Fourier. Les coefficients B_n représentent ainsi les harmoniques des sons émis chez le voisin.

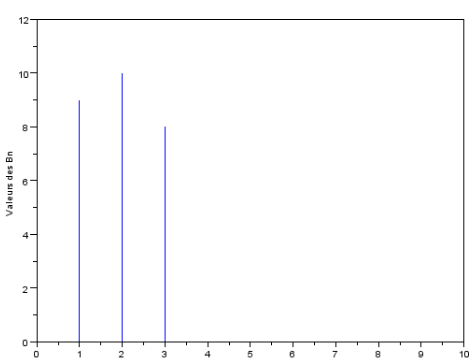
On peut montrer que les sons qui « traversent »le plafond sont décrits par des fonctions de la forme

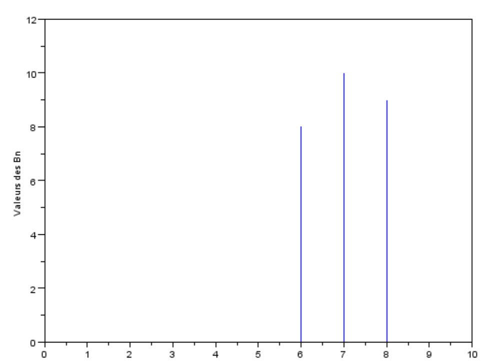
$$g(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin(n\pi x)(\cos(n\pi\mu t) - \cos(n\pi\nu t)),$$

avec $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad C_n = \dfrac{\lambda B_n}{n^2}$.
(ν est une constante liée aux caractéristiques du plafond et $\lambda \in \mathbf{R}$ dépend des différentes constantes.)

Les coefficients C_n représentent ainsi les harmoniques des sons entendus dans mon salon.

1. On donne ci-dessous deux spectres des coefficients B_n correspondants à deux sons émis chez le voisin.





Représenter les spectres des coefficients C_n correspondants. On considèrera que $\lambda = \frac{1}{2}$.

2. Que peut-on en déduire sur la transmission des sons à travers un plafond ?

L'illustration est tirée d'un document de Loïc Teyssier.