# Mathématiques pour l'ingénieur mécanicien

Jean-Romain Heu 29 janvier 2024

# Rappels

# 1 Coniques et quadriques

#### Définition

Une **conique** est une courbe du plan définie par une équation polynômiale de degré 2.

C'est donc l'ensemble des points (x, y) solutions d'une équation de la forme

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

# Classification des coniques

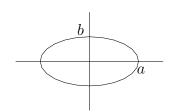
Il y a trois types de coniques non dégénérées : les ellipses, les hyperboles et les paraboles. L'étude de la forme quadratique  $(x,y)\mapsto ax^2+bxy+cy^2$  permet de les distinguer. Voilà une façon de faire : on note  $M=\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$  la matrice associée à la conique. On note  $\lambda$  et  $\mu$  ses valeurs propres. Comme M est symétrique, ses valeurs propres sont nécessairement réelles.

- $\star$  Si  $\lambda$  et  $\mu$  sont non nulles et de même signe, alors la conique est une ellipse;
- $\star$  si  $\lambda$  et  $\mu$  sont non nulles et de signes opposés, alors la conique est une hyperbole;
- ★ si l'une des valeurs propres est nulle, alors la conique est une parabole.

Finalement, le type d'une conique dépend du signe de  $\det(M) = \lambda \mu$ . Dans les deux premiers cas, les vecteurs propres associés aux valeurs propres fournissent les directions des axes de la conique. Dans le cas de la parabole, le vecteur propre associé à la valeur propre nulle fournit la direction de la parabole. Quitte à faire un changement de repère simple (rotation + translation), on se retrouve dans l'un de ces trois cas :

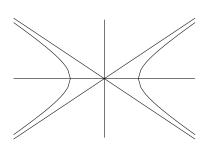
$$\bigstar \ \underline{\text{Ellipse}} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Une telle courbe peut se paramétrer facilement sous la forme  $(a\cos(t), b\sin(t)), t \in [0, 2\pi].$ 

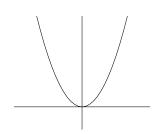


$$\bigstar$$
 Hyperbole :  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 

Les axes de l'hyperbole sont les droites d'équation  $\frac{y}{b} = \frac{x}{a}$  et  $\frac{y}{b} = -\frac{x}{a}$ . Une branche de cette hyperbole peut se paramétrer sous la forme  $(a \operatorname{ch}(t), b \operatorname{sh}(t)), t \in \mathbf{R}$ .



★ Parabole:  $y = \alpha x^2$ Elle peut se paramétrer sous la forme  $(x, \alpha x^2), x \in \mathbf{R}$ .



# Définition

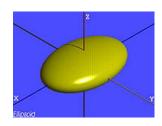
Une **quadrique** est une surface de l'espace définie par une équation polynômiale de degré 2.

C'est donc l'ensemble des points (x, y, z) solutions d'une équation de la forme

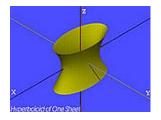
$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$$

Là encore, l'étude de la forme quadratique associée et plus particulièrement les valeurs propres de sa matrice permettent de caractériser et classifier les différentes quadriques non dégénérées. Quitte à changer de repère, une quadrique non dégénérée peut s'écrire sous une des formes présentées sur la page suivante.

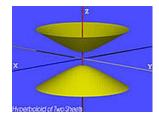
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



$$\underline{\text{Hyperboloïde à une nappe}}: \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

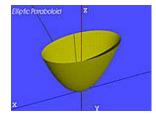


$$\underline{\text{Hyperboloïde à deux nappes}}: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



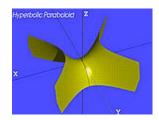
 $\underline{\text{Parabolo\"ide elliptique}}:$ 

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$



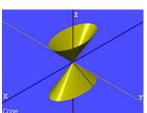
 $\underline{\text{Parabolo\"ide hyperbolique}}:$ 

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$



Cône elliptique :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



Mentionnons également les cylindres elliptiques, hyperboliques et paraboliques.

# 2 Équations différentielles linéaires

• On considère une équation différentielle de la forme

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0,$$

où a et b désignent des fonctions réelles continues. Il s'agit d'une équation linéaire homogène d'ordre 1. Sur tout intervalle où la fonction a ne s'annule pas, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 1 donné par

$$S_0 = \{ \lambda e^{-\int \frac{b}{a}}; \ \lambda \in \mathbf{R} \},\$$

où  $\int \frac{b}{a}$  désigne une primitive de la fonction  $\frac{b}{a}$ .

• On considère maintenant la même équation avec un second membre :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x).$$

Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme  $y_0 + y_p$  où  $y_0$  désigne une des solutions de l'équation homogène associée vue ci-dessus et  $y_p$  désigne une solution particulière de l'équation avec second membre. Pour déterminer une telle solution particulière, soit on la devine en en cherchant une de la même forme que f, soit on utilise la méthode de la variation de la constante.

$$S = \{ y_p(x) + \lambda e^{-\int \frac{b}{a}}; \ \lambda \in \mathbf{R} \}.$$

 $\bullet$  Considérons maintenant une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0,$$

avec  $a, b, c \in \mathbf{R}$ .

On détermine les racines  $r_1$  et  $r_2$  du polynôme  $aX^2 + bX + c$ . L'espace des solutions (de dimension 2) est alors

- $\bigstar$   $S_0 = \{\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}; \ \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}$  si  $r_1$  et  $r_2$  sont des racines réelles distinctes;
- $\bigstar S_0 = \{ \lambda e^{r_1 x} + \mu x e^{r_1 x}; \ \lambda, \mu \in \mathbf{R} \} \text{ si } r_1 = r_2;$
- ★  $S_0 = \{e^{\alpha x}(\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x)); \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}\$  si  $r_1 = \bar{r}_2 = \alpha + i\beta$  sont des racines complexes conjuguées.
- S'il y a un second membre, il faut là encore ajouter aux solutions ci-dessus une solution particulière de l'équation.

# I. Champs de vecteurs

# 1 Définitions

Dans tout ce chapitre, n désignera un entier égal à 2 ou 3 et U désignera une partie de  $\mathbb{R}^n$ . Les applications considérées dans ce cours seront toutes de classe  $\mathcal{C}^2$  sur U.

#### Définition

Un **champ de vecteurs** est une application qui à un point du plan (ou de l'espace) associe un vecteur. C'est donc une application de la forme

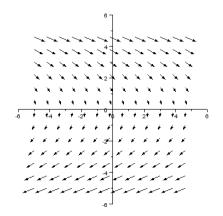
$$\vec{\varphi}: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$$
.

On voit l'ensemble de départ comme un ensemble de points et l'ensemble d'arrivée comme un ensemble de vecteurs.

#### Exemple

On représente graphiquement une telle application en dessinant en chaque point p de U le vecteur  $\vec{\varphi}(p)$  qui lui est associé.

Considérons dans  $\mathbf{R}^2$  le champ défini par  $\vec{\varphi}(x,y) = (y,-1)$ . En diminuant la norme des vecteurs afin que la figure soit plus lisible, ce champ est représenté ci-contre.



#### Champ de vecteurs et système différentiel

Les champs de vecteurs sont naturellement associés à des systèmes différentiels.

Soit 
$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases}$$
 un système différentiel.

On peut lui associer le champ de vecteur défini par

$$\vec{\varphi}(x,y) = (f(x,y),g(x,y)).$$

Le vecteur  $\vec{\varphi}(x,y)$  représente alors le vecteur dérivé au point (x,y) d'une solution du système passant par ce point.

#### Définition

Soit  $\vec{\varphi}$  un champ de vecteur. On appelle **trajectoire** de  $\vec{\varphi}$  toute solution du système différentiel associé à  $\vec{\varphi}$ .

Les trajectoires sont les courbes  $\gamma$  définies d'un intervalle ]a,b[ de  ${\bf R}$  vers U telles que

$$\forall t \in ]a, b[, \vec{\gamma'}(t) = \vec{\varphi}(\gamma(t)).$$

On appelle **ligne de champ** de  $\vec{\varphi}$  les supports des trajectoires de  $\vec{\varphi}$ . Ce sont les courbes telles qu'en tout point p de la courbe, le vecteur tangent à la courbe en p est colinéaire au vecteur  $\vec{\varphi}(p)$ .

Les lignes de champ sont plus faciles à visualiser : ce sont les courbes dirigées par le champ  $\vec{\varphi}$ . Les trajectoires sont des paramétrisations précises de ces courbes. La vitesse de parcours des courbes est donnée par la norme des vecteurs du champ.

Concrètement, déterminer les trajectoires d'un champ de vecteurs signifie résoudre le système différentiel associé. Pour déterminer les lignes de champ, on cherche les courbes  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  telles que pour tout t,  $\vec{\gamma'}(t)$  est colinéaire au vecteur  $\vec{\varphi}(x(t), y(t)) = (\varphi_x(x(t), y(t)), \varphi_y(x(t), y(t)))$ . Le plus souvent, cela revient à résoudre  $\frac{x'}{\varphi_x} = \frac{y'}{\varphi_y}$ . On obtient une équation en x et y qui définit des courbes du plan : ce sont alors les lignes de champ.

**Exemple** Reprenons le champ  $\vec{\varphi}(x,y) = (y,-1)$ . On visualise facilement sur sa représentation ses lignes de champ : il suffit de suivre les flèches. Ainsi ses lignes ressemblent à des paraboles. les trajectoires sont plus difficile à décrire, il s'agit de comprendre que le champ ne donne pas simplement une direction mais aussi une vitesse de parcours des lignes de champ.

Cherchons les lignes de champ : on cherche une courbe  $\gamma(t)=(x(t),y(t))$  telle que pour tout t,  $\vec{\gamma}'(t)=(x'(t),y'(t))$  est colinéaire à  $\vec{\varphi}(\gamma(t))=(y(t),-1)$ . On obtient ainsi la condition -x'-yy'=0. Donc x'=-yy'. On intègre :  $x=-\frac{y^2}{2}$  + cste. On reconnaît une équation de parabole. Les lignes de champ de  $\vec{\varphi}$  sont les paraboles d'axe Ox, d'équations  $x=-\frac{y^2}{2}$  + cste.

Passons aux trajectoires. On cherche désormais une courbe paramétrée  $\gamma(t)=(x(t),y(t))$  telle que pour tout t,

$$\vec{\gamma}'(t) = (x'(t), y'(t)) = \vec{\varphi}(\gamma(t)) = (y(t), -1).$$

On obtient le système différentiel x'(t) = y(t), y'(t) = -1. Il est facile à résoudre : y(t) = -t + a puis  $x(t) = -\frac{t^2}{2} + at + b$ . Ainsi les trajectoires sont les courbes paramétrées  $\gamma(t) = (-\frac{t^2}{2} + at + b, -t + a)$  où a et b sont des constantes dépendant de la position initiale  $\gamma(0)$ .

Tout ce qui vient d'être décrit se généralise naturellement aux champs de  $\mathbb{R}^3$ .

#### Coordonnées cylindriques

Notons  $(r, \theta, z)$  les coordonnées cylindriques d'un point (x, y, z) de  $\mathbf{R}^3$ . En coordonnées cylindriques, les vecteurs d'un champ de vecteur sont écrits de la manière suivante.

Soit  $p = (x, y, z) = (r, \theta, z)$ . On définit au point p le repère orthonormé  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ :  $\vec{u}_r$  est le vecteur radial unitaire,  $\vec{u}_\theta$  est le vecteur orthonadial unitaire orienté dans le sens direct par rapport à  $\vec{u}_r$  et enfin  $\vec{u}_z$  est le vecteur unitaire vertical (c'est le troisième vecteur de la base canonique).

Écrire le vecteur  $\vec{\varphi}(p)$  dans la base des coordonnées cylindriques signifie l'écrire dans la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ . Ainsi, si au point  $p = (r, \theta, z)$  (en coordonnées cylindriques usuelles)  $\vec{\varphi}(p) = \varphi_r(p)\vec{u}_r + \varphi_\theta(p)\vec{u}_\theta + \varphi_z(p)\vec{u}_z$ , on écrit alors  $\vec{\varphi}(p) = (\varphi_r(p), \varphi_\theta(p), \varphi_z(p))$ .

La particularité de cette écriture est que la base dans laquelle on décompose chaque vecteur dépend du point où l'on se trouve. L'intérêt de cette écriture est qu'elle reste additive. Si on considère deux champs  $\vec{\varphi}_1$  et  $\vec{\varphi}_2$  écrits dans la base des coordonnées cylindriques, alors leur somme  $\vec{\varphi}_1 + \vec{\varphi}_2$  a pour coordonnées les sommes de leurs coordonnées respectives.

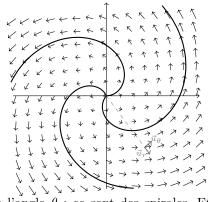
Notons  $\vec{\varphi} = (\varphi_r, \varphi_\theta, \varphi_z)$  un champ de vecteurs écrit en coordonnées cylindriques, et soit  $\gamma(t) = (r(t), \theta(t), z(t))$  une courbe paramétrée en cylindrique. Alors son vecteur vitesse est donné en tout point par  $\vec{\gamma}'(t) = (r'(t), r(t)\theta'(t), z'(t))$ .

Ainsi, la courbe  $\gamma$  est une ligne de champs de  $\vec{\varphi}$  si  $(r', r\theta', z')$  est en tout point colinéaire à  $\vec{\varphi} = (\varphi_r, \varphi_\theta, \varphi_z)$ . Et  $\gamma$  définit une trajectoire de  $\vec{\varphi}$  s'il y a égalité entre ces deux vecteurs. Dans les deux cas, on obtient des courbes décrites en coordonnées cylindriques usuelles.

# Exemple

Soit  $\vec{\varphi}$  défini sur  $\mathbf{R}^2$  en coordonnées polaires par  $\vec{\varphi}(r,\theta)=(1,r)$ . Cela signifie qu'en tout point de coordonnées  $(r,\theta)$ , le vecteur correspondant est  $\vec{u}_r+r\vec{u}_\theta$ . Ainsi, ce camp a une composant radiale égale à 1 en tout point et une composante orthoradiale qui est d'autant plus grande que l'on s'éloigne de l'origine.

Déterminons les lignes de champ : on cherche une courbe  $\gamma(t) = (r(t), \theta(t))$  telle qu'en tout point, son vecteur directeur  $\vec{\gamma}'(t) = (r', r\theta')$  est colinéaire au vecteur  $\vec{\varphi}(\gamma(t)) = (1, r)$ . Il faut donc que  $r'r = 1 \cdot r\theta'$ . On obtient ainsi  $r' = \theta'$  et en intégrant, on déduit que les lignes de champ de  $\vec{\varphi}$  sont les courbes d'équation polaire  $r = \theta + \theta_0$ .



Il s'agit de courbes dont la distance à l'origine augmente avec l'angle  $\theta$ : ce sont des spirales. Et comme la relation entre r et  $\theta$  est linéaire, il s'agit plus précisément de spirales d'Archimède.

Pour déterminer les trajectoires de  $\vec{\varphi}$ , il faut résoudre le système r'(t) = 1 et  $r(t)\theta'(t) = r(t)$ . On obtient  $r(t) = t + r_0$  et  $\theta(t) = t + \theta_0$ .

Les solutions obtenues sont des courbes paramétrées portées par des spirales d'Archimède parcourues à vitesse angulaire constante 1.

#### À retenir

- ★ Savoir représenter l'allure d'un champ de vecteur.
- ★ En déterminer les équations de ses lignes de champs et les représenter.
- ★ Si cela est faisable, en calculer les trajectoires (il s'agit alors de courbes paramétrées).
- ★ Savoir faire cela en coordonnées polaires ou cylindriques.

#### Opérations sur les champs 2

Les champs considérés sont tous de classe  $\mathcal{C}^2$  sur une partie U de  $\mathbf{R}^3$ . Les définitions pour des champs du plan sont parfaitement analogues

#### 2.1Divergence

#### Définition

Soit  $\vec{\varphi}=(\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z)$  un champ de vecteurs. On définit mathématiquement la divergence du champ  $\vec{\varphi}$  par

$$\operatorname{div}(\vec{\varphi}) = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z}.$$

La divergence mesure (comme une dérivée usuelle) la variation locale du champ.

#### Définition

Si la divergence d'un champ de vecteur est partout nulle, on dit qu'il est à flux conservatif.

Sinon, on dit qu'il est à flux non conservatif.

Si un champ est à flux conservatif, cela signifie grossièrement que pour toute partie fermée de  $\mathbb{R}^n$ , la quantité de champ qui « y entre » est égale à la quantité de champ qui « en sort ». Un écoulement naturel se fait en général à flux conservatif.

Si le champ est à flux non conservatif, cela signifie que le champ possède une source ou un **puits**.

Le champ de gravitation et le champ magnétique sont à flux conservatif. Le champ électrique ne l'est pas. Les charges électriques positives et négatives constituent des sources et des puits pour ce champ.

# Propriété

Soient  $\vec{\varphi}$  et  $\vec{\psi}$  des champs de vecteurs,  $\lambda \in \mathbf{R}$  et f un champ scalaire.

$$\bigstar \operatorname{div}(\lambda \vec{\varphi} + \vec{\psi}) = \lambda \operatorname{div}(\vec{\varphi}) + \operatorname{div}(\vec{\psi}),$$

$$\star \operatorname{div}(\lambda \vec{\varphi} + \vec{\psi}) = \lambda \operatorname{div}(\vec{\varphi}) + \operatorname{div}(\vec{\psi}),$$

$$\star \operatorname{div}(f \times \vec{\varphi}) = f \times \operatorname{div}(\vec{\varphi}) + \operatorname{grad}(f) \cdot \vec{\varphi}.$$

Si  $\vec{\varphi} = (\varphi_r, \varphi_\theta, \varphi_z)$  est écrit dans la base des coordonnées cylindriques, alors sa divergence est donnée par

$$\operatorname{div}(\vec{\varphi}) = \frac{1}{r} \frac{\partial (r\varphi_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z}$$

#### 2.2Gradient et courbes de niveau

#### Définition

Un champ scalaire est simplement une fonction de plusieurs variables : c'est une application qui associe une valeur à un point du plan (ou de l'espace).

$$f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$
.

#### **Définition**

Soit f un champ scalaire. On appelle **courbe de niveau** de f (ou surface de niveau en dimension 3) toute partie de  $\mathbb{R}^n$  sur laquelle f est égale à une constante donnée. Ce sont les ensembles  $\{p \in \mathbb{R}^n \mid f(p) = \lambda\}$  où  $\lambda$  est une constante fixée.

À moins que f ne soit constante sur des parties ouvertes de  $\mathbb{R}^n$ , les lignes de niveau de f sont des courbes dans le cas n=2 et des surfaces dans le cas n=3.

#### Définition

Soit f un champ scalaire. On appelle **gradient** de f le champ de vecteur défini en tout point  $p \in U$  par

$$\vec{\operatorname{grad}}(f)(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p)\right).$$

Si le champ f est exprimé en fonction des coordonnées cylindriques  $(f(r, \theta, z))$ , alors son gradient est donné dans la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  associée aux coordonnées cylindriques par

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}(f)(r,\theta,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Le champ de gradient permet de quantifier les variations de la fonction f. Il s'interprète comme une dérivée vectorielle de f.

# Propriété

Soient f et g deux champs scalaires,  $\lambda \in \mathbf{R}$  et  $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

- $\bigstar$  grad $(\lambda f + g) = \lambda grad(f) + grad(g),$
- ★  $\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f \overrightarrow{\text{grad}}(g) + g \overrightarrow{\text{grad}}(f),$ ★  $\overrightarrow{\text{grad}}(\frac{f}{g}) = \frac{g \overrightarrow{\text{grad}}(f) f \overrightarrow{\text{grad}}(g)}{g^2},$
- $\bigstar$  grad $(h \circ f) =$ grad $(f) \times (h' \circ f)$ .

#### Définition

Soit  $\vec{\varphi}$  un champ de vecteur. On dit que  $\vec{\varphi}$  est un **champ de gradient** s'il existe un champ scalaire f tel que  $\vec{\varphi} = \operatorname{grad}(f)$ .

le champ scalaire f est alors appelé **potentiel** associé au champ de vecteurs  $\vec{\varphi}$ . Il est unique à une constante près.

Être un champ de gradient est une propriété importante pour un champ de vecteur. Cela signifie en un sens que le champ possède une primitive. On dit qu'il dérive d'un potentiel. Cela sera très utile dans le chapitre suivant quand il s'agira d'intégrer des champs de vecteurs.

#### Propriété: interprétation graphique du gradient

Soit f un champ scalaire et  $p = \in U$ .

- $\bigstar$  grad(f)(p) est orthogonal en p à la courbe de niveau de f passant par p;
- $\bigstar$  grad(f)(p) pointe dans la direction où f augmente;
- $\star$  la norme de grad(f)(p) est d'autant plus grande que f varie rapidement au voisinage de p, i.e. que les courbes de niveau sont rapprochées au voisinage de p;
- $\star$  grad(f)(p) est dirigé dans la direction de plus grande pente de f.

#### **Démonstration :** Plaçons-nous en dimension 2 pour la preuve.

Soit  $\mathcal{C}$  une courbe régulière du plan que l'on paramètre par  $\gamma(t)=(x(t),y(t))$  et notons  $p=\gamma(t_0)$  un point de cette courbe. Nous supposerons ces fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  en  $t_0$ . Les différentes propositions reposent sur le calcul de dérivée suivant :  $f\circ\gamma$  est une fonction définie de  $\mathbf{R}$  vers  $\mathbf{R}$  et

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = x'(t_0) \times \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t_0)) + y'(t_0) \times \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t_0)) = \langle \gamma'(t_0) | \overrightarrow{\operatorname{grad}}(f)(\gamma(t_0)) \rangle.$$

Supposons maintenant que  $\mathcal{C}$  est une courbe de niveau de f. Alors f est constante le long de  $\mathcal{C}$ . Donc  $(f \circ \gamma)' = 0$  et donc  $(f \circ \gamma)' = 0$ . On en déduit que f est orthogonal à  $\gamma'$  en tout point de f. Comme f dirige f, on en déduit que le gradient est orthogonal à la courbe de niveau.

Supposons maintenant que  $\mathcal{C}$  est une droite passant par p que l'on paramètre par  $\gamma(t) = p + t\vec{u}$  où  $\vec{u}$  est un vecteur directeur unitaire de  $\mathcal{C}$ . Alors  $(f \circ \gamma)'(0)$  représente la variation de f au voisinage de p. Et d'après notre calcul :  $(f \circ \gamma)'(t_0) = \langle \vec{u} | \operatorname{grad}(f)(\gamma(t_0)) \rangle$ . Ce produit scalaire est maximal lorsque  $\vec{u}$  et  $\operatorname{grad}(f)$  sont colinéaires de même sens. Ainsi la variation de f est maximale dans la direction de son gradient. Et cette variation est d'autant plus grande que son gradient est de norme élevée.

# Théorème : gradient et optimisation

★ Soit  $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . Si f possède un extremum local en  $p \in \mathbf{R}^n$ , alors  $\operatorname{grad} f(p) = \vec{0}$ .

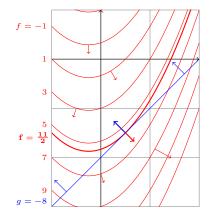
#### ★ Optimisation sous contrainte

Soit maintenant  $g: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $A = \{p \in \mathbf{R}^n \mid g(p) = a\}$ . Si en restriction à A, la fonction f possède un extremum local, alors grad f(p) et grad g(p) sont colinéaires.

#### Exemple

Soient  $f(x,y) = 2x^2 + x - 3y$  et g(x,y) = -4x + 4y. On souhaite déterminer une couple (x,y) tel que -4x + 4y = -8 et f minimale. Le gradient de f est donné par  $\operatorname{grad} f(x,y) = (4x+1,-3)$  et celui de g par  $\operatorname{grad} g(x,y) = (-4,4)$ . Ces deux gradients sont colinéaires lorsque 4x+1=3, donc si  $x=\frac{1}{2}$ . On souhaite que -4x+4y=-8 donc  $y=-\frac{3}{2}$ .

Tentons de comprendre : les courbes de niveau de f sont les paraboles d'équation  $2x^2+x-3y=c$  et la droite d'équation -4x+4y=-8 est une courbe de niveau de g. On comprend bien graphiquement que sur cette droite, f prend sa plus petite valeur en un point où les courbes de niveaux sont tangentes. Et leurs gradients en ce point sont ainsi colinéaires.



#### 2.3 Rotationnel

#### Définition

Soit  $\vec{\varphi} = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$  un champ de vecteur. On appelle **rotationnel** de  $\vec{\varphi}$  le champ de vecteur défini par

$$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\varphi}) = \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_z}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial y}\right)$$

Le rotationnel mesure la tendance qu'a le champ à tourner localement autour d'un certain axe. Il est dirigé selon cet axe de rotation locale.

#### Propriété

Soient  $\vec{\varphi}$  et  $\vec{\varphi}'$  des champs de vecteurs,  $\lambda \in \mathbf{R}$  et f un champ scalaire.

- $\bigstar \vec{\operatorname{rot}}(\lambda \vec{\varphi} + \vec{\varphi}') = \lambda \vec{\operatorname{rot}}(\vec{\varphi}) + \vec{\operatorname{rot}}(\vec{\varphi}'),$
- $\bigstar \ \vec{\mathrm{rot}}(f \times \vec{\varphi}) = f \times \vec{\mathrm{rot}}(\vec{\varphi}) + \vec{\mathrm{grad}}(f) \wedge \vec{\varphi},$
- $\bigstar \operatorname{div}(\vec{\operatorname{rot}}(\vec{\varphi})) = 0,$
- $\star \vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}}(f)) = 0.$

Cette dernière propriété possède une réciproque. Si le domaine U est simplement connexe (i.e. sans trou), alors un champ de vecteur  $\vec{\varphi}$  défini sur U est un champ de gradient si et seulement si  $\vec{\operatorname{rot}}(\vec{\varphi})(p) = \vec{0}$  en tout point p de U.

# 2.4 Laplacien

#### Définition

Soit f un champ scalaire. On appelle **laplacien** de f le champ scalaire défini par

$$\Delta f = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}(f)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Le laplacien est un opérateur classique qui intervient dans de nombreux problèmes. Il représente localement, en un point, l'écart moyen entre la valeur du champ en ce point et ses valeurs en les points voisins.

On appelle **fonction harmonique** une fonction dont le laplacien est nul en tout point. Pour une telle fonction, sa valeur en tout point est égale à la valeur moyenne de ses valeurs voisines.

Dans beaucoup de problèmes physiques, les solutions à l'équilibre sont des fonctions harmoniques.

Expression du laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\Delta f(r,\theta,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

# 2.5 Notation $\vec{\nabla}$

On définit l'**opérateur nabla** par

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Il permet de réécrire simplement les opérateurs que nous avons défini : soient  $\vec{\varphi}$  un champ de vecteur et f un champ scalaire.

- $\bigstar \text{ grad}(f) = \vec{\nabla} f,$
- $\bigstar \operatorname{div}(\vec{\varphi}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi},$
- $\star \vec{\mathrm{rot}}(\vec{\varphi}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\varphi},$
- $\bigstar \ \Delta f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f.$

# À retenir

- ★ Connaître les définitions des opérateurs et savoir les interpréter comme des dérivées.
- ★ Savoir manipuler leurs propriétés.
- ★ Savoir déterminer les courbes de niveau d'un champ de vecteur et les représenter avec le gradient du champ.
- ★ Savoir reconnaître une champ de gradient et en déterminer un potentiel.

# II. Intégrales le long d'une courbe

# 1 Circulation d'un champ

Dans ce chapitre,  $\vec{\varphi}$  désignera un champ de vecteur de classe  $C^1$  défini sur  $\mathbf{R}^n$  avec n=2 ou 3. Le couple  $([a,b],\gamma)$  désignera une **courbe paramétrée**, c'est-à-dire une application  $\gamma:[a,b]\to\mathbf{R}^n$  de classe  $C^1$ . Une telle fonction définit une paramétrisation de l'ensemble image  $\mathcal{C}=\gamma([a,b])$  qui est une courbe de  $\mathbf{R}^n$ .

#### Définition

Soit  $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$  une fonction. L'intégrale curviligne de f le long de  $\mathcal{C}$  est la somme intégrale de ses valeurs sur  $\mathcal{C}$ . Elle se calcule à l'aide d'une paramétrisation de  $\mathcal{C}$ :

$$\int_{\mathcal{C}} f d\ell = \int_{a}^{b} f(\gamma(t)) \|\vec{\gamma}'(t)\| dt.$$

#### Remarques

- $\bigstar$  Le terme d $\ell$  désigne un élément de longueur infinitésimal de la courbe  $\mathcal{C}$ .
- $\star$  On peut montrer que l'intégrale curviligne de f ne dépend que de la courbe  $\mathcal{C}$  et de son orientation, mais pas du choix de sa paramétrisation par  $\gamma$ .
- ★ Si f = 1,  $\int_{\mathcal{C}} 1 d\ell$  est la longueur de  $\mathcal{C}$ .

#### Définition

On appelle **circulation** du champ  $\vec{\varphi}$  le long de  $\mathcal{C}$  l'intégrale curviligne de ses composantes tangentes à  $\mathcal{C}$ . Elle se calcule ainsi :

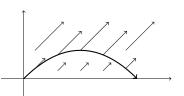
$$\int_{\mathcal{C}} \vec{\varphi} \cdot d\vec{\ell} = \int_{a}^{b} \langle \vec{\varphi}(\gamma(t)) \mid \vec{\gamma'}(t) \rangle dt.$$

Si  $\vec{\varphi}$  représente un champ de force, sa circulation représente le travail de la force le long de  $\mathcal{C}$ .

#### Exemples

- $\star$  Si en tout point de  $\mathcal{C}$ , le vecteur  $\vec{\varphi}$  est orthogonal à  $\mathcal{C}$ , alors la circulation du champ le long de  $\mathcal{C}$  est nulle.
- $\bigstar$  Si en tout point de  $\mathcal{C}$ , le vecteur  $\vec{\varphi}$  est tangent à  $\mathcal{C}$ , de norme 1 et dirigé dans le même sens que  $\mathcal{C}$ , alors la circulation du champ le long de  $\mathcal{C}$  est égale à la longueur de  $\mathcal{C}$ .

★ Soit  $\varphi(x,y) = (y,y)$  et  $\mathcal{C}$  la courbe définie par l'équation  $y = x - x^2$  pour  $x \in [0,1]$ . on l'oriente dans le sens des x croissant. Graphiquement, on voit que la partie tangente du chemin est plus forte dans la première partie de la courbe que dans la seconde. Compte tenu des directions de la courbe et du champ, La circulation devrait être positive.



Paramétrons la courbe par  $\gamma(t)=(t,t-t^2)$  pour  $t\in[0,1]$ . Alors

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{\varphi} \cdot \vec{\mathrm{d}\ell} = \int_{0}^{1} \langle (t - t^{2}, t - t^{2}) \mid (1, 1 - 2t) \rangle dt = \int_{0}^{1} 2t - 4t^{2} + 2t^{3} dt = \frac{1}{6}.$$

#### Propriété

Soit  $\vec{\varphi}$  un champ de gradient :  $\vec{\varphi} = \overrightarrow{\text{grad}} f$ . Notons  $A = \gamma(a)$  et  $B = \gamma(b)$  les extrémités de la courbe  $\mathcal{C}$ .

Alors la circulation de  $\vec{\varphi}$  le long de  $\mathcal{C}$  ne dépend que de ses extrémités A et B et

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{\varphi} \cdot \vec{\mathrm{d}\ell} = f(B) - f(A).$$

Remarques

Dans le cas d'un champ de force, on dit alors que la force est conservatrice : le travail le long d'un chemin ne dépend que des extrémités du chemin.

Si la courbe  $\mathcal C$  est fermée (A=B), la circulation d'un champ de gradient est alors nulle.

# 2 Formes différentielles

Nous ne parlerons ici que des formes différentielles d'ordre 1. Les formes différentielles sont des champs de formes linéaires. Elles sont directement liées aux champs de vecteurs et sont parfois appelées champs de covecteurs. Elles offrent un nouveau langage qui permet entre autre de définir correctement les notions d'éléments de longueur ou de surface.

#### Définition

Soit U une partie de  $\mathbb{R}^3$ . On note  $(\mathbb{R}^3)^*$  l'ensemble des formes linéaires sur  $\mathbb{R}^3$ , c'est-à-dire des applications linéaires de  $\mathbb{R}^3$  vers  $\mathbb{R}$ .

Une forme linéaire se note ainsi :

$$\omega: \mathbf{R}^3 \to (\mathbf{R}^3)^* (x, y, z) \mapsto \varphi_x(x, y, z) dx + \varphi_y(x, y, z) dy + \varphi_z(x, y, z) dz$$

où  $\varphi_x(x, y, z)dx + \varphi_y(x, y, z)dy + \varphi_z(x, y, z)dz$  désigne la forme linéaire  $(a, b, c) \mapsto \varphi_x(x, y, z)a + \varphi_y(x, y, z)b + \varphi_z(x, y, z)c$ .

Remarques Les termes dx, dy et dz ne sont ici que des notations pour les variables de la forme linéaire  $\omega(x,y,z)$ . On les remplace par a, b et c quand on évalue  $\omega(x,y,z)(a,b,c)$ . Comme cette notation le suggère, ces évaluations se font en pratique en des éléments différenciés, typiquement des dérivées.

**Exemple** Considérons la forme différentielle définie par  $\omega(x,y,z) = dx + xdy - 2y^2dz$ . Pour (x,y,z) = (3,5,7), on obtient la forme linéaire dx + 3dy - 50dz qui à (a,b,c) associe le nombre a + 3b - 50c.

#### Définition

Soit f un champ scalaire défini de  $\mathbb{R}^3$  vers  $\mathbb{R}$ . On appelle **différentielle** de f la forme différentielle définie par

$$df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)dz.$$

**Exemple** Avec  $f(x, y, z) = xy + z^2$ , on obtient df(x, y, z) = y dx + x dy + 2z dz. Cela représente la variation infinitésimale de f au point (x, y, z) lorsque l'on fait varier x, y et z de dx, dy, dz.

#### **Définition**

Soit  $\omega$  une forme différentielle. On dit que  $\omega$  est **exacte** s'il existe un champ scalaire f de classe  $C^1$  tel que  $\omega=\mathrm{d} f$ .

La fonction f est alors appelée **primitive** de  $\omega$ .

#### Définition

Soit  $\omega = \varphi_x \mathrm{d}x + \varphi_y \mathrm{d}y + \varphi_z \mathrm{d}z$ . Cette forme différentielle est naturellement associée au champ de vecteurs  $\vec{\varphi} = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$  de la manière suivante.

Soit  $p=(x,y,z)\in \mathbf{R}^3$  et  $\vec{v}$  un vecteur de  $\mathbf{R}^3$ . Alors, comme  $\omega(p)=\varphi_x(p)\mathrm{d}x+\varphi_y(p)\mathrm{d}y+\varphi_z(p)\mathrm{d}z$ , on obtient en évaluant cette forme linéaire en  $\vec{v}$ 

$$\omega(p)(\vec{v}) = < \vec{\varphi}(p) \mid \vec{v}>.$$

En particulier, on peut en déduire

 $\omega$  exacte  $\Leftrightarrow \vec{\varphi}$  est un champ de gradient.

#### Définition

On appelle intégrale curviligne de  $\omega$  le long d'une courbe  $\mathcal C$  le nombre

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = \int_{a}^{b} \omega(\gamma(t))(\vec{\gamma'}(t)) dt.$$

On retrouve la circulation du champ associé à  $\omega.$  De même, on a la propriété suivante.

#### Propriété

Soit  $\omega = df$  une forme exacte. Alors

$$\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}f = f(B) - f(A).$$

Si la courbe  $\mathcal{C}$  est fermée, alors cette intégrale est nulle.

#### Propriété

Soit  $\mathcal{C}$  une courbe fermée de classe  $C^1$  dans  $\mathbf{R}^2$  délimitant un domaine  $\Omega$ . Alors l'aire algébrique de  $\Omega$  est égale à

$$\mathcal{A}(\Omega) = \int_{\mathcal{C}} x dy = \int_{\mathcal{C}} -y dx = \int_{\mathcal{C}} \frac{-y dx + x dy}{2}.$$

Le signe de cette aire dépend de l'orientation de  $\mathcal{C}$ : il est positif si  $\mathcal{C}$  est parcourue dans le sens positif, négatif si elle est parcourue dans le sens horaire.

#### À retenir

- ★ Savoir paramétrer une courbe simple.
- ★ Savoir calculer la circulation d'un champ le long d'une courbe.
- ★ Savoir estimer une telle circulation à partir de l'allure du champ (son orientation par rapport à la courbe, sa norme) et de la longueur de la courbe.
- ★ Connaître le formalisme des formes différentielles et des intégrales curvilignes.
- ★ Savoir calculer l'aire d'un domaine délimité par une courbe paramétrée.

#### Intégrales de surfaces III.

#### **Surfaces** 1

Une surface est une partie de  $\mathbb{R}^3$  qui est localement homéomorphe à des parties de  $\mathbb{R}^2$ . Plus vulgairement, une surface est une partie de  $\mathbb{R}^3$  de « dimension 2 », c'est-à-dire possédant 2 degrés de liberté.

Exemple Soient 
$$\vec{u}_1 = (1, 1, 1), \vec{u}_2 = (2, 1, 0)$$
 et  $A = (1, 2, 4)$ . Alors  $\mathcal{P} = \{A + t_1 \vec{u}_1 + t_2 \vec{u}_2 ; t_1, t_2 \in A \}$ 

**R**} est un plan affine.

On peut le paramétrer à l'aide de la fonction  $\psi(t_1,t_2)=(1+t_1+2t_2,2+t_1+t_2,4+t_1)$  (notons qu'il y a bien 2 paramètres libres).

Ce plan est aussi défini par l'équation  $x-2y+z=1:\mathcal{P}=\{(x,y,z)\mid x-2y+z=1\}$  (il y a 3 variables libres mais la contrainte imposée par l'équation fait perdre un degré de liberté).

#### Définition

Une **surface** est une partie de  $\mathbb{R}^3$  que l'on peut définir de façon implicite :

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\},\$$

où f est une fonction continue, ou de manière paramétrique

$$S = \{ \psi(u, v) ; (u, v) \in \Omega \},$$

où  $\psi$  est une fonction continue de  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  dans  $\mathbf{R}^3$ .

#### Remarques

- \* Attention, ceci n'est pas une définition rigoureuse. Il faudrait imposer des conditions à f ou  $\psi$  pour garantir que l'ensemble ainsi défini est bien une surface et non une courbe ou autre chose.
- ★ La paramétrisation d'une surface n'est jamais unique.

#### Exemples

- $\bigstar$  La sphère unité est définie par l'équation cartésienne  $x^2+y^2+z^2=1$  ou, en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \psi)$ , par r = 1. On peut la paramétrer par  $\psi(\theta, \psi) = (\sin(\psi)\cos(\theta), \sin(\psi)\sin(\theta), \cos(\psi)), 0 < \theta < 2\pi$ ,  $0 < \psi < \pi$ .
- ★ Le cylindre d'axe Oz, de rayon 1 est défini par l'équation cartésienne  $x^2 + y^2 = 1$  ou l'équation cylindrique  $\rho = 1$ . On peut le paramétrer par  $\psi(\theta, z) = (\cos(\theta), \sin(\theta), z), 0 < \theta < 2\pi, -z \in \mathbf{R}$ . On peut également le paramétrer par  $\tilde{\psi}(u,v) = (\cos(u+v),\sin(u+v),u-v)$ .

#### Définition

Soit  $\psi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et S la surface associée.

La surface S a un **point singulier** en  $p=\psi(u,v)$  si  $\frac{\vec{\partial \psi}}{\partial u}(u,v)$  et  $\frac{\vec{\partial \psi}}{\partial v}(u,v)$  sont colinéaires. Sinon p est un **point régulier**.

Pour faire simple, dire qu'une surface est régulière signifie qu'elle est lisse. Un point singulier est un point en lequel la surface présente une rupture de régularité.

**Exemple** On paramètre un cône d'axe 0z avec la fonction  $\psi(u,v) = (v\cos(u),v\sin(u),v)$ . Ses dérivées partielles dont données par  $\frac{\partial \psi}{\partial u} = (-v\sin(u),v\cos(u),0)$  et  $\frac{\partial \psi}{\partial v} = (\cos(u),\sin(u),1)$ . Compte tenu de la troisième coordonnée, ces deux vecteurs ne sont jamais colinéaires sauf si l'un des deux est nul, ce qui est le cas pour v=0. Ainsi le cône est régulier en tout point sauf pour v=0, c'est-à-dire au sommet du cône. Il s'agit bien d'un point en lequel la surface n'est pas lisse.

#### Définition : plan tangent

Soit p un point régulier de S.

Un vecteur  $\vec{v}$  de  $\mathbf{R}^3$  est un vecteur tangent à S en p s'il existe une courbe paramétrée,  $\mathcal{C}^1$ , incluse dans S, passant par p telle que  $\vec{v}$  soit un vecteur tangent à cette courbe.

On appelle **plan tangent** à S en p le plan vectoriel des vecteurs tangents à S en p. On le note  $T_pS$ .

# Propriété

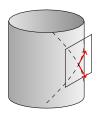
Si S est paramétrée par  $\psi(u,v)$ , alors les vecteurs  $\frac{\vec{\partial \psi}}{\partial u}(u,v)$  et  $\frac{\vec{\partial \psi}}{\partial v}(u,v)$  sont des vecteurs tangents à S en  $p=\psi(u,v)$ .

Ainsi, si p est un point régulier,  $T_pS = \text{Vect}\left(\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial v}(u, v)\right)$ .

Exemple  $\bigstar$  Reprenons le cylindre  $\mathcal C$  paramétré par  $\psi(\theta,z)=(\cos(\theta),\sin(\theta),z)$ . Lorsque l'on fixe  $\theta$  et que l'on fait varier z, on se déplace verticalement sur le cylindre, sans tourner autour de son axe. C'est ce qu'exprime le vecteur dérivé  $\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z}=(0,0,1)$  qui dirige justement au point  $p=\psi(\theta,z)$  ce chemin. De même, si on fixe z et qu'on fait varier  $\theta$ , on se déplace horizontalement sur le cylindre en tournant autour de son axe. C'est ce qu'exprime le vecteur dérivé  $\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u}=(-\sin(u),\cos(u),0)$  qui dirige en p ce mouvement de rotation. Ces deux vecteurs forment une base de l'ensemble des directions possible sur le cylindre partant du point p et le plan tangent en p est

$$T_n \mathcal{C} = \text{Vect}((0,0,1), (-\sin(u),\cos(u),0)).$$

\* Recommençons avec la seconde paramétrisation du cylindre que nous avions proposé :  $\psi(u,v) = (\cos(u+v),\sin(u+v),u-v)$ . Les vecteurs dérivés sont  $\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial u} = (-\sin(u+v), \cos(u+v), 1)$  et  $\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial v} = (-\sin(u+v), \cos(u+v), -1)$ . Ces deux vecteurs sont deux nouveaux vecteurs directeurs du même plan tangent  $T_n\mathcal{C}$  que ci-dessus.



#### Définition: vecteur normal

Soit p un point régulier de S.

On appelle **vecteur normal** à S en p un vecteur  $\vec{n}_p$  orthogonal à  $T_pS$  en p, c'est-à-dire orthogonal à son plan tangent.

#### Remarques

- $\star$  Il y a deux types de vecteurs normaux : ceux qui sont dirigés d'un côté de S et ceux qui sont dirigés de l'autre côté. Cela aura de l'importance dans la suite. Lorsque l'on considère une surface S, il faut toujours préciser comment on **oriente** S, c'est-à-dire de quel côté de S on dirige ses vecteurs normaux.
- $\star$  Si la surface est paramétrée par  $\psi(u,v)$ , calculer un vecteur normal en p est simple :  $\vec{n}_p = \pm \frac{\vec{\partial \psi}}{\partial u} \wedge \frac{\vec{\partial \psi}}{\partial v}$ , le signe dépendant de l'orientation choisie.
- $\bigstar$  On définit à partir de ce dernier le vecteur élément de surface de S en p :  $\vec{\mathrm{d}S} = \pm \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial v} \mathrm{d}u \mathrm{d}v.$  Comme la norme d'un produit vectoriel est égale à l'aire du parallélogramme en-

gendré par les deux vecteurs, la norme du vecteur d $\dot{S}$  représente l'aire infinitésimale de la partie de S lorsque partant de  $p = \psi(u, v)$ , on fait varier u et v de du et dv.

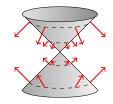
# Exemples

 $\bigstar$  Pour notre cylindre ci-dessus, on peut calculer un vecteur normal en p avec

$$\frac{\vec{\partial \psi}}{\partial z} \wedge \frac{\vec{\partial \psi}}{\partial \theta} = (0,0,1) \wedge (-\sin(\theta),\cos(\theta),0) = (-\cos(\theta),-\sin(\theta),0).$$

On reconnaît le vecteur  $-\vec{u}_{\rho}$  de la base associée aux coordonnées cylindriques. C'est bien un vecteur normal au cylindre. Il est dirigé vers l'intérieur du cylindre; si on souhaite orienter le cylindre vers l'extérieur, il suffit de prendre son opposé.

- $\star$  Considérons le cône paramétré par  $\psi(u,v)=(v\cos(u),v\sin(u),v)$ . Un vecteur normal au cône en  $p = \psi(u, v)$  est donné par
- $\frac{\vec{\partial \psi}}{\partial u} \wedge \frac{\vec{\partial \psi}}{\partial v} = (-v\sin(u), v\cos(u), 0) \wedge (\cos(u), \sin(u), 1) = (v\cos(u), v\sin(u), -v).$  Ce vecteur est dirigé vers l'extérieur du cône : vers le bas lorsque v > 0 et vers le haut lorsque v < 0. Notre calcul fournit un vecteur normal nul en v = 0, c'està-dire au sommet du cône. Il n'y a pas de contradiction, ce point est un point singulier pour lequel on ne peut définir ni plan tangent, ni vecteur normal.



# 2 Intégrale de surface

# Définition : intégrale de surface

Soit S une surface paramétrée par  $\psi: \Omega \to \mathbf{R}^3$  et f une fonction de  $\mathbf{R}^3$  vers  $\mathbf{R}$ . On appelle intégrale de f sur S la « somme » des valeurs prises par f sur S. On la calcule en utilisant une paramétrisation de S de la manière suivante :

$$\iint_S f dS = \iint_{\Omega} f(\psi(u, v)) \cdot \left\| \frac{\overrightarrow{\partial \psi}}{\partial u} \wedge \frac{\overrightarrow{\partial \psi}}{\partial v} \right\| du dv.$$

# Remarques

- $\bigstar$  Le calcul d'une intégrale de surface se ramène ainsi à une intégrale double classique.
- ★ D'après la remarque de la partie précédente,  $dS = \|\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial v}\|$  représente une aire infinitésimale associée à la paramétrisation  $\psi$  et joue ainsi un rôle analogue à celui du jacobien.
- $\bigstar$  En prenant f=1, on définit l'**aire** de  $S:\mathcal{A}(S)=\iint_S\mathrm{d}S.$

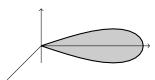
Exemples  $\bigstar$  Calculons l'aire du cône paramétré par  $\psi(u,v) = (v\cos(u),v\sin(u),\frac{h}{b}v)$  avec  $0 < u < 2\pi$  et 0 < v < b. Le vecteur  $\vec{dS}$  associé est

$$\vec{\mathrm{d}S} = \frac{\vec{\partial \psi}}{\partial u} \wedge \frac{\vec{\partial \psi}}{\partial v} = (\frac{h}{b}v\cos(u), \frac{h}{b}v\sin(u), -v),$$

et sa norme est d $S=|v|\sqrt{\frac{h^2}{b^2}+1}.$  L'aire du cône est alors donnée par

$$\mathcal{A}(\hat{\text{cone}}) = \iint_{S} dS = \int_{u=0}^{2\pi} \int_{v=0}^{b} |v| \sqrt{\frac{h^{2}}{b^{2}} + 1} dv du = 2\pi \frac{b^{2}}{2} \sqrt{\frac{h^{2}}{b^{2}} + 1} = \pi b \sqrt{h^{2} + b^{2}}.$$

★ Considérons de nouveau la pale  $\mathcal{P}$  rencontrée dans le chapitre précédent, mais négligeons son épaisseur. On peut alors la paramétrer par  $\psi(\rho,u)=(3\rho\sin(u),0,\rho\cos(u)\sin(u))$  avec  $0<\rho<1$  et  $0< u<\pi$ . Calculer son moment cinétique par rapport à l'axe Oz revient alors à calculer l'intégrale de surface  $M_{Oz}=\iint_{\mathcal{P}}d(P,Oz)\mathrm{d}S$ .



Avec notre paramétrisation,  $dS = \|(3\sin(u), 0, \cos(u)\sin(u)) \wedge (3\rho\cos(u), 0, \rho(\cos^2(u) - \sin^2(u)))\| = 3\rho\sin^3(u)$ , et la distance d'un point  $\psi(\rho, u)$  à l'axe Oz est  $3\rho\sin(u)$ . Ainsi

$$M_{Oz} = \iint_{\mathcal{P}} d(P, Oz) dS = \int_0^1 \int_0^{\pi} 3\rho \sin(u) \cdot 3\rho \sin^3(u) du d\rho = \frac{9\pi}{8}.$$

# 3 Flux d'un champ à travers une surface

# Définition : flux d'un champ de vecteurs

Soit S une surface paramétrée par  $\psi:\Omega\to\mathbf{R}^3$  et orientée. Soit  $\vec{\varphi}$  un champ de vecteur sur  $\mathbf{R}^3$ .

On appelle flux de  $\vec{\varphi}$  à travers S la quantité du champ  $\vec{\varphi}$  qui est normale à la surface S et on la note  $\iint_S \vec{\varphi} \cdot d\vec{S}$ .

Avec notre paramétrisation  $\psi$ , ce nombre se calcule ainsi :

$$\iint_{S} \vec{\varphi} \cdot \vec{\mathrm{d}S} = \iint_{\Omega} \langle \vec{\varphi}(\psi(u,v)) \mid \frac{\vec{\partial \psi}}{\partial u} \wedge \frac{\vec{\partial \psi}}{\partial v} \rangle \mathrm{d}u \mathrm{d}v.$$

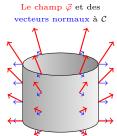
# Remarques

- $\bigstar$  Le vecteur  $\vec{dS}$  dépend en partie de l'orientation choisie de S. Cela influe sur le signe du flux de  $\vec{\varphi}$ .
- $\star$  Si  $\vec{\varphi}$  est un champ de vitesse, son flux à travers une surface représente un **débit**.
- $\bigstar$  Si le champ  $\vec{\varphi}$  est tangent à S en tout point de S, alors son flux à travers S est nul.
- $\bigstar$  Si le champ  $\vec{\varphi}$  est normal à S en tout point de S et de norme constante, alors son flux à travers S est égal au produit de l'aire de S et de cette norme, le signe dépendant de l'orientation choisie.

**Exemple** Considérons le cylindre  $\mathcal{C}$  paramétré par  $\psi(\theta,z)=(R\cos(\theta),R\sin(\theta),z)$  pour  $\theta\in[0,2\pi[$  et  $z\in]0,h[$ . On l'oriente vers l'extérieur. On considère le champ radial  $\vec{\varphi}(x,y,z)=(x,y,z)$ .

On peut le décomposer en  $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_1 + \vec{\varphi}_2$  avec  $\vec{\varphi}_1(x,y,z) = (x,y,0)$  et  $\vec{\varphi}_2(x,y,z) = (0,0,z)$ . Le premier champ  $\vec{\varphi}_1$  est normal au cylindre en tout point et de norme constante égale à R sur  $\mathcal{C}$ . De plus, il traverse  $\mathcal{C}$  dans le sens positif. Ainsi, son flux à travers  $\mathcal{C}$  est égal à  $\iint_{\mathcal{C}} \vec{\varphi}_1 \cdot d\vec{S} = +R \cdot \mathcal{A}(\mathcal{C}) = 2\pi R^2 h$ . Le champ  $\vec{\varphi}_2$  est vertical et donc tangent à  $\mathcal{C}$  en tout point. Ainsi, son flux à travers  $\mathcal{C}$  est nul :  $\iint_{\mathcal{C}} \vec{\varphi}_2 \cdot d\vec{S} = 0$ .

On en déduit le flux de 
$$\vec{\varphi}$$
 à travers  $\mathcal{C}: \iint_{\mathcal{C}} \vec{\varphi} \cdot d\vec{S} = 2\pi R^2 h + 0 = 2\pi R^2 h$ .



Calculons maintenant ce flux avec notre paramétrisation de  $\mathcal{C}$ . Compte tenu de l'orientation choisie, le vecteur  $d\vec{S}$  est donné en tout point de  $\mathcal{C}$  par  $d\vec{S} = +(R\cos(\theta), R\sin(\theta), 0)d\theta dz$ . Ainsi

$$\iint_{\mathcal{C}} \vec{\varphi} \cdot d\vec{S} = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{h} \langle (R\cos(\theta), R\sin(\theta), z) \mid (R\cos(\theta), R\sin(\theta), 0) \rangle dz d\theta = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{h} R^{2} dz d\theta = 2\pi R^{2} h.$$

# À retenir

 $\bigstar$  Savoir paramétrer des surfaces simples et déterminer leurs plans tangents.

- ★ Savoir calculer des intégrales de surface.
- ★ Savoir estimer et calculer le flux d'un champ à travers une surface.

# IV. Théorème de Stokes et applications

L'objectif de ce chapitre est de présenter les formules de Stokes et de Green-Ostrogradski. Ces formules ainsi que d'autres sont des conséquences d'un théorème très général : le théorème de Stokes. Celui-ci est d'un niveau un peu trop élevé pour ce cours mais son idée centrale est simple.

La première partie est hors programme, ce sont les parties suivantes qui doivent être maîtrisées.

#### 1 Théorème de Stokes

Commençons par un rappel : soit f une fonction dérivable sur un intervalle [a, b]. Alors  $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$ . Il s'agit du théorème fondamental de l'analyse qui a permis de lier les concepts initialement indépendants de dérivée et d'intégrale.

Son interprétation est simple : si on somme sur [a, b] toutes les variations infinitésimales f'(t)dt de la fonction f, on obtient la variation globale de f sur l'intervalle : f(b) - f(a).

Notons que a et b ne jouent pas un rôle parfaitement symétrique; l'intervalle a été implicitement **orienté** de a vers b.

C'est ce théorème que nous allons généraliser en dimension supérieure. Cela s'écrit dans le langage des formes différentielles mais le sens profond reste le même : la somme des variations infinitésimales d'une grandeur sur un domaine est égale à sa variation globale au bord du domaine.

#### Formes différentielles

Nous avons déjà défini les 1-formes différentielles. C'est un objet mathématique que l'on peut intégrer le long de courbes. Nous souhaitons étendre le concept en dimension supérieure.

Une 2-forme différentielle dans  $\mathbb{R}^3$  se définit ainsi :

 $\omega(x, y, z) = a_1 dx \wedge dy + a_2 dx \wedge dz + a_3 dy \wedge dz$  où les  $a_i$  sont des fonctions de x, y et z. Nous n'expliquerons pas en détail ce que représente le symbole  $\wedge$ . Disons simplement qu'il s'apparente bien à un produit vectoriel. En particulier, l'ordre des termes a une importance :  $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$ .

L'intégration d'une 2-forme sur une surface se fait de manière analogue à l'intégration des 1-forme sur une courbe. Les termes  $dx \wedge dy$  s'apparentent alors à des éléments de surface dS élémentaires :  $dx \wedge dy$  représente un élément d'aire horizontal de taille dxdy et orienté vers le haut (en raisonnant avec un produit vectoriel). De même  $dy \wedge dz$  représente un élément d'aire d'un plan parallèle à Oyz dirigé vers les x croissants et  $dx \wedge dz$  représente un élément d'aire d'un plan parallèle à Oxz dirigé vers les y décroissants (pour orienter dans l'autre sens, il faut considérer  $dz \wedge dx$ ).

Ces définitions s'étendent aux dimensions supérieures sans difficulté.

#### Différentielle d'une différentielle

On peut définir la différentielle d'une (n-1)-forme différentielle. Il s'agit d'une n-forme différentielle. Pour n=1, 2 et 3, cela se fait ainsi :

- $\bigstar$  n = 1: si  $\omega = f(x, y, z)$ , alors  $d\omega = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$ .
- $\bigstar \ n = 2 : \text{si } \omega = f(x,y,z) \mathrm{d}x + g(x,y,z) \mathrm{d}y + h(x,y,z) \mathrm{d}z, \text{ alors } \mathrm{d}\omega = \frac{\partial f}{\partial y} \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial z} \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial z} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \frac{\partial g}{\partial z} \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y + \frac{\partial h}{\partial x} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \frac{\partial h}{\partial y} \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$  Pour une forme plus simple du type  $\omega = f(x,y) \mathrm{d}x + g(x,y) \mathrm{d}y$ , on obtient  $\mathrm{d}\omega = \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$
- $\star n = 3 : \text{si } \omega = f(x, y, z) dx \wedge dy + g(x, y, z) dx \wedge dz + h(x, y, z) dy \wedge dz, \text{ alors}$   $d\omega = \frac{\partial f}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial g}{\partial y} dy \wedge dx \wedge dz + \frac{\partial h}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial x}\right) dx \wedge dy \wedge dz.$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de Stokes.

#### Théorème

Soit  $\Omega$  une partie bornée de  ${\bf R}^n$  de dimension d et soit  $\partial\Omega$  son bord (c'est un objet de dimension d-1) qu'on oriente « correctement ». Soit  $\omega$  une (d-1)-forme différentielle définie sur  $\Omega$  et son bord. Alors

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial \Omega} \omega.$$

#### **Orientations**

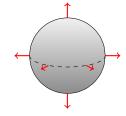
Précisons ce qu'on entend par « orienter correctement »  $\Omega$  et son bord dans les cas qui nous intéressent.

 $\mathbf{n}=\mathbf{1}:\Omega$  est une courbe et son bord est réduit à deux points. Orienter  $\Omega$  signifie choisir un sens de parcours et orienter son bord correctement signifie attribuer un signe à chaque extrémité de la manière suivante.





- $\mathbf{n}=\mathbf{2}:\Omega$  est une surface et  $\partial\Omega$  est une courbe fermée. Orienter  $\Omega$  signifie choisir le côté de ses vecteurs normaux. On peut le faire comme on le souhaite. Mais une fois ce sens choisi, il faut orienter  $\partial\Omega$  de manière à ce que cette courbe soit parcourue dans le sens trigonométrique autour des vecteurs normaux à  $\Omega.$
- $\mathbf{n}=\mathbf{3}:\Omega$  est un volume et nous n'avons pas appris à orienter un volume. Cela n'est néanmoins pas nécessaire. Pour que le théorème s'applique, il faut simplement orienter la surface fermée  $\partial\Omega$  vers l'extérieur de  $\Omega.$



Dans tous les cas, un changement d'orientation n'influe que sur le signe de l'égalité dans le théorème de Stokes.

# 2 Formule de Green-Riemann

#### Théorème

Soit D un domaine de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathcal{C}$  son bord. Ce dernier est une courbe du plan que nous orientons dans le sens trigonométrique.

Soit  $\omega(x,y) = f(x,y) dx + g(x,y) dy$  une 1-forme différentielle définie sur  $\mathbf{R}^2$ . Alors l'intégrale curviligne de  $\omega$  sur  $\mathcal{C}$  est donnée par

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = \int_{\mathcal{C}} f(x, y) dx + g(x, y) dy = \iint_{D} \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy.$$

# Remarques

- $\bigstar$  C'est une application directe du théorème de Stokes. L'élément  $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$  apparaît à la fin en norme sous forme d'une aire infinitésimale  $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ .
- ★ Avec  $\omega(x,y) = x dy$  (ou  $\omega(x,y) = -y dx$ ), on obtient  $\int_{\mathcal{C}} x dy = \iint_{D} 1 \cdot dx dy = \mathcal{A}(D)$ . On démontre ainsi le résultat rencontré dans le chapitre II.

# 3 Formule de Stokes

#### Théorème

Soit  $\mathcal{C}$  une courbe fermée de  $\mathbf{R}^3$  et  $\vec{\varphi}$  un champ de vecteurs défini sur  $\mathbf{R}^3$ . Soit  $\mathcal{S}$  une surface de  $\mathbf{R}^3$  dont le bord est  $\mathcal{C}$ . On oriente  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{C}$  de manière à ce que  $\mathcal{C}$  soit parcourue dans le sens direct autour des vecteurs normaux à  $\mathcal{S}$ .

Alors la circulation de  $\vec{\varphi}$  sur  $\mathcal{C}$  est égale au flux de son rotationnel à travers  $\mathcal{S}$ .

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{\varphi} \cdot \vec{\mathrm{d}\ell} = \iint_{S} \vec{\mathrm{rot}}(\vec{\varphi}) \cdot \vec{\mathrm{d}S}.$$

#### Remarques

- $\star$  Expliquons sommairement ce que signifie la formule de Stokes : le rotationnel mesure localement comment le champ tourne autour d'un axe. Le terme  $\vec{rot}(\vec{\varphi}) \cdot \vec{dS}$  s'interprète comme une circulation infinitésimale le long d'un chemin infinitésimal tournant autour du point considéré. Si on somme toutes ces circulations infinitésimales sur S, on obtient la façon dont le champ tourne globalement autour de S, c'est-à-dire sa circulation le long de son bord C.
- $\star$  La surface  $\mathcal{S}$  n'est pas unique. La seule contrainte imposée est que son bord soit la courbe  $\mathcal{C}$ . Si on cherche à calculer une circulation le long de  $\mathcal{C}$ , il peut être judicieux de choisir  $\mathcal{S}$  en fonction des propriétés de  $rot(\varphi)$  afin que le calcul de son flux à travers  $\mathcal{S}$  soit facile.

- $\bigstar$  La formule de Green-Riemann est un simple corollaire de la formule de Stokes pour le cas particulier des courbes planes, en choisissant pour  $\mathcal S$  la surface plane délimitée par  $\mathcal C$ .
- ★ Si  $S_f$  est une surface fermée de  $\mathbf{R}^3$ , alors la formule de Stokes permet de montrer que  $\iint_{S_f} \vec{\operatorname{rot}}(\vec{\varphi}) \cdot \vec{\mathrm{d}} \vec{S} = 0$ .
- ★ Le théorème d'Ampère est une application directe de la formule de Stokes.

# Démonstration

Posons  $\vec{\varphi} = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$  et  $\omega = \varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz$ . Alors  $d\omega = \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_z}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$  Appliquons le théorème de Stokes :

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = \int_{\mathcal{C}} \varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz$$

$$= \iint_{\mathcal{S}} \left( \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

En reprenant la définition de l'intégrale curviligne d'une 1-forme différentielle, on reconnaît immédiatement que la première intégrale est égale à la circulation de  $\vec{\varphi}$  le long de  $\mathcal{C}$ .

Il s'agit maintenant de reconnaître dans la seconde intégrale un flux. On reconnaît déjà les trois coordonnées du champ de vecteurs  $\vec{rot}\vec{\varphi}$ . Une meilleure connaissance des 2-formes nous aurait permis de conclure directement. Contentons-nous d'une explication vague.

On a déjà dit que le terme  $dx \wedge dy$  pouvait s'interpréter comme un vecteur élément de surface  $d\vec{S}$  d'une surface horizontale. Cet élément est associé à la composante verticale de  $rot\vec{\varphi}$ . Il s'agit justement de la composante du champ qui traverse orthogonalement les parties horizontales de la surface. Ainsi  $\iint_{\mathcal{S}} \psi_z dx \wedge dy$  représente le flux de la partie verticale d'un champ  $\psi$  à travers  $\mathcal{S}$ . Les deux autres termes représentent alors les flux des deux composantes horizontales du champ et on obtient ainsi bien le flux du champ à travers la surface. Il faudrait tout de même s'assurer que les orientations sont bien respectées.

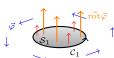
# Exemples

★ Considérons dans  $\mathbf{R}^3$  le champ tournant autour de l'axe  $Oz: \vec{\varphi}(x,y,z) = (-y,x,0)$ . On souhaite calculer sa circulation le long du cercle  $\mathcal{C}_1$  défini par  $x^2 + y^2 = R$  et z = 0. Le calcul direct est simple mais utilisons néanmoins la formule de Stokes.

Le rotationnel du champ est  $\vec{\text{rot}}\vec{\varphi}=(0,0,2)$ . C'est un champ vertical. Choisissons comme surface s'appuyant sur la courbe le disque  $S_1$  défini par  $x^2+y^2\leqslant R$  et z=0. Si le cercle est orienté dans le sens trigonométrique usuel, il faut orienter les normales au disque vers le haut. Alors

$$\int_{\mathcal{C}_1} \vec{\varphi} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{S_1} \vec{\operatorname{rot}} \vec{\varphi} \cdot d\vec{S} = 2\mathcal{A}(S_1) = 2\pi R^2,$$

en utilisant le fait que le rotationnel est normal au disque et de norme



constante.  $\bigstar$  Généralisons un peu cela : soit  $\mathcal{C}_2$  une courbe fermée incluse dans un plan horizontal. La courbe n'étant pas définie explicitement, il nous est impossible de calculer la circulation de  $\vec{\varphi}$ . Considérons néanmoins le domaine plan  $S_2$  délimité par cette courbe.

Alors, d'après la formule de Stokes :

$$\int_{\mathcal{C}_2} \vec{\varphi} \cdot \vec{\mathrm{d}\ell} = \iint_{S_2} \vec{\mathrm{rot}} \vec{\varphi} \cdot \vec{\mathrm{d}S} = 2\mathcal{A}(S_2).$$

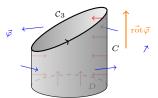
Nous avons réussi à exprimer simplement la circulation du champ.

 $\bigstar$  Prenons maintenant une courbe fermée quelconque  $\mathcal{C}_3$  de l'espace. Afin de nous ramener aux considérations précédentes, considérons le cylindre vertical C engendré par cette courbe et refermons-le à une certaine hauteur avec une surface horizontale D. Ainsi  $S_3 = C \cup D$  est une surface s'appuyant sur la courbe  $\mathcal{C}_3$  que nous orientons de manière cohérente avec l'orientation de  $\mathcal{C}_3$ . Alors

$$\int_{\mathcal{C}_3} \vec{\varphi} \cdot \vec{\mathrm{d}\ell} = \iint_{S_3} \vec{\mathrm{rot}} \vec{\varphi} \cdot \vec{\mathrm{d}S} = \iint_{C} \vec{\mathrm{rot}} \vec{\varphi} \cdot \vec{\mathrm{d}S} = \iint_{D} \vec{\mathrm{rot}} \vec{\varphi} \cdot \vec{\mathrm{d}S}.$$

Or  $\vec{\text{rot}} \vec{\varphi}$  étant vertical, il est tangent au cylindre C en tout point, et il est normal à D en tout point. Ainsi

$$\int_{\mathcal{C}_3} \vec{\varphi} \cdot \vec{\mathrm{d}\ell} = 0 + 2\mathcal{A}(D) = 2\mathcal{A}(D).$$



# 4 Formule de Green-Ostrogradski

#### Théorème

Soit  $\mathcal{V}$  un volume de  $\mathbf{R}^3$  dont le bord est une surface fermée  $\mathcal{S}$ . On oriente  $\mathcal{S}$  vers l'extérieur de  $\mathcal{V}$ . Soit  $\vec{\varphi}$  un champ défini sur  $\mathbf{R}^3$ .

Alors le flux de  $\vec{\varphi}$  à travers  $\mathcal{S}$  est égale l'intégrale de sa divergence sur  $\mathcal{V}$ :

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{\varphi} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{\varphi} dx dy dz.$$

En particulier, si  $\vec{\varphi}$  est à flux conservatif (div $\vec{\varphi}=0$ ), son flux à travers une surface fermée est nul.

La divergence mesure localement la variation infinitésimale du champ. La formule de Green-Ostrogradski signifie simplement que si on somme toutes les variations infinitésimales du champ à l'intérieur de V, on obtient la variation globale du champ, c'est-à-dire la différence globale entre ce qui sort de V et ce qui y entre. C'est exactement ce que mesure le flux du champ à travers le bord de V.

#### Démonstration

Posons  $\vec{\varphi} = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$  et  $\omega = \varphi_x dy \wedge dz + \varphi_y dz \wedge dx + \varphi_z dx \wedge dy$ . Alors  $d\omega = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy = \text{div} \vec{\varphi} dx \wedge dy \wedge dz$ . Appliquons le théorème de Stokes :

$$\iint_{\mathcal{S}} \varphi_x dy \wedge dz + \varphi_y dz \wedge dx + \varphi_z dx \wedge dy = \iiint_{V} \operatorname{div} \vec{\varphi} dx dy dz.$$

Comme dans la preuve de la formule de Stokes, on peut interpréter l'intégrale de gauche comme un flux : le terme  $\varphi_z dx \wedge dy$  est le flux infinitésimal de la partie verticale du champ  $\vec{\varphi}$  à travers un élément de surface horizontal de S. Idem avec les deux autres termes. Leur somme est alors égale au flux total du champ à travers S.

**Exemples**  $\bigstar$  On considère la portion de cône définie par  $z^2 = x^2 + y^2$  avec 0 < z < h, orientée vers l'extérieur du cône. On souhaite calculer le flux du champ  $\vec{\varphi}(x,y,z) = (0,0,y+2z)$  à travers C. Un calcul direct utilisant une paramétrisation de C est possible.

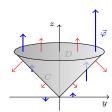
Proposons une autre méthode utilisant notre théorème. Notons déjà que le théorème ne peut pas s'appliquer puisque C n'est pas une surface fermée. Commençons donc par la fermer en ajoutant le disque D inclus dans le plan d'équation z=h et en l'orientant vers le haut. Notons  $\mathcal V$  le volume délimité par  $\mathcal S=C\cup D$ .

Nous pouvons désormais appliquer le théorème de Green-Ostrogradski :

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{\varphi} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{\varphi} \, dx dy dz = \iiint_{\mathcal{V}} 2 \, dx dy dz = 2 \operatorname{Vol}(\mathcal{V}).$$

Le volume du cône est connu : Vol( $\mathcal{V}$ ) =  $\frac{\pi h^3}{3}$ . On obtient donc

$$\iint_{\mathcal{C}} \vec{\varphi} \cdot \vec{\mathrm{d}S} + \iint_{\mathcal{D}} \vec{\varphi} \cdot \vec{\mathrm{d}S} = \frac{2\pi h^3}{3}.$$



Ainsi, pour déduire le flux recherché, il ne reste plus qu'à calculer le flux de  $\vec{\varphi}$  à travers D. C'est assez simple en remarquant que  $\vec{\varphi}$  est normal à D:

$$\iint_{\mathcal{D}} \vec{\varphi} \cdot d\vec{S} = \iint_{\mathcal{C}} y + 2h \, dxdy = \int_{r=0}^{h} \int_{\theta=0}^{2\pi} (r\sin(\theta) + 2h) \cdot rd\theta dr = 2\pi h^{3}.$$

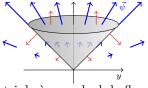
Concluons:

$$\iint_{\mathcal{C}} \vec{\varphi} \cdot \vec{\mathrm{d}S} = \frac{2\pi h^3}{3} - 2\pi h^3 = -\frac{4\pi h^3}{3}.$$

★ On souhaite maintenant déterminer le centre de gravité G du volume  $\mathcal{V}$  précédent. Pour des raisons de symétries évidentes,  $x_G = y_G = 0$ . Il reste à calculer la hauteur de G donnée par  $z_G = \frac{1}{\text{Vol}(\mathcal{V})} \iiint_{\mathcal{V}} z \; \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$ . L'intégrale triple peut se calculer sans grande difficulté en paramétrant  $\mathcal{V}$ .

Proposons une autre méthode : considérons le champ  $\vec{\psi}(x,y,z)=(xz,yz,z^2)$ . Alors  ${\rm div}\vec{\psi}=4z$ . D'après le théorème de Green-Ostrogradski,

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{\psi} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} 4z dx dy dz,$$



avec toujours  $\mathcal{S} = C \cup D$ . Nous avons ainsi ramené le calcul de notre intégrale triple à un calcul de flux. Or le champ  $\vec{\psi}$  est en tout point colinéaire au champ radial (x,y,z). Il est en particulier tangent à notre cône, donc  $\iint_C \vec{\psi} \cdot d\vec{S} = 0$ . Sur D, la composante normale de  $\vec{\psi}$  est donnée par  $z^2 = h^2$ . Ainsi, en respectant l'orientation de D,  $\iint_D \vec{\psi} \cdot d\vec{S} = +h^2 \mathcal{A}(D) = \pi h^4$ .

Finalement, on déduit de tout cela que  $\iiint_{\mathcal{V}} z \, dx dy dz = \frac{1}{4}(0 + \pi h^4) = \frac{\pi h^4}{4}$ . Et on conclut

$$z_G = \frac{\pi h^4 / 4}{\pi h^3 / 3} = \frac{3h}{4}.$$

# À retenir

- ★ Comprendre que tous les théorèmes présentés sont une généralisation du théorème d'intégration  $\int_a^b f' = f(b) f(a)$ .
- ★ Savoir utiliser ces théorèmes pour simplifier des calculs d'intégrales : ramener un calcul de circulation à un calcul surfacique et réciproquement, ramener un calcul de flux à un calcul volumique et réciproquement.
- ★ Savoir interpréter physiquement ces théorèmes (théorème de Gauss, théorème d'Ampère, etc).