• Chapitre I.

Exercice 1 Représenter dans $\mathbf{R}^2$ l'allure des champs de vecteurs associés aux systèmes différentiels suivants.

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t)y(t) \\ y'(t) &= x(t)y(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= x(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x'(t) &= \frac{1}{x(t)} \\ y'(t) &= x(t) \end{cases}$$

Déterminer leurs lignes de champs puis leurs trajectoires.
Indication : pour résoudre le premier système, on peut remarquer que $x' = y'$ puis se ramener à une équation en x appelée équation différentielle de Bernoulli, qui se résout à l'aide d'un changement de variable.

Exercice 2 Représenter l'allure des champs vectoriels suivants définis en coordonnées cartésiennes et déterminer leurs lignes de champs.

$$\vec{\varphi}_1(x,y,z) = (0,1,y), \qquad \vec{\varphi}_2(x,y,z) = (y,-x,1).$$

Indication : pour les lignes de champs de $\vec{\varphi}_2$, on essaiera de démontrer que $z' = (-\arctan(\frac{y}{x}))'$.

Représenter l'allure des champs vectoriels suivants définis en coordonnées cylindriques (pour $r \neq 0$) et déterminer leurs lignes de champ.

$$\vec{\varphi}_3(r,\theta) = (\cos(\theta),1), \qquad \vec{\varphi}_4(r,\theta,z) = (0,r,1), \qquad \vec{\varphi}_5(r,\theta,z) = (-r,0,\frac{1}{r}).$$

Exercice 3 **Champs sur une sphère**

On définit sur la sphère unité le champ vectoriel suivant écrit dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ des coordonnées sphériques.

$$\vec{\psi}(r=1,\theta,\varphi) = (0,\sin(\varphi),0)$$

Le représenter et déterminer ses lignes de champ. Si la sphère représente la Terre, quelle grandeur physique peut être représentée par un tel champ ?

Trouver un champ vectoriel défini sur la sphère unité dont les lignes de champs sont les méridiens. Donner un exemple physique d'un tel champ ?

Exercice 4 **Lecture graphique de champs de vecteurs**

Le modèle de Lotka-Volterra est un système d'équations différentielles décrivant la croissance de deux populations animales, l'une étant un prédateur de l'autre. En notant x la population des proies et y la population des prédateurs, le modèle est de la forme

$$\begin{cases} x' &= ax - bxy \\ y' &= -cy + dxy \end{cases}$$

avec $a, b, c, d > 0$.

On a représenté le champ de vecteur (normalisé) associé à ce système.

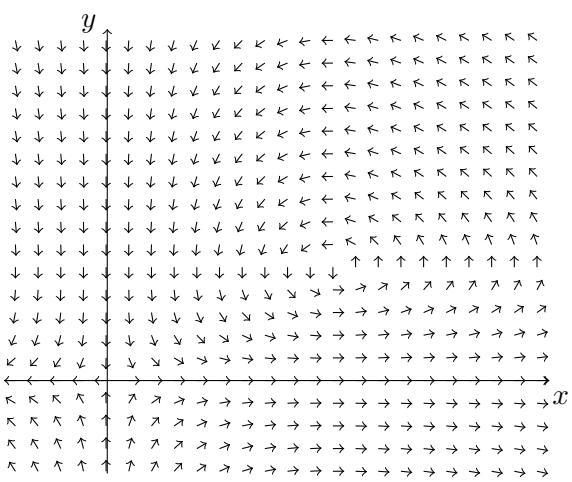
1. Quelle est l'allure des lignes de champ de ce système. Comment évoluent les deux populations.
2. Montrer que ces lignes de champ sont définies par des équations de la forme $dx - c\ln(x) = a\ln(y) - by + e$.
3. Montrer que de telles courbes sont fermées.

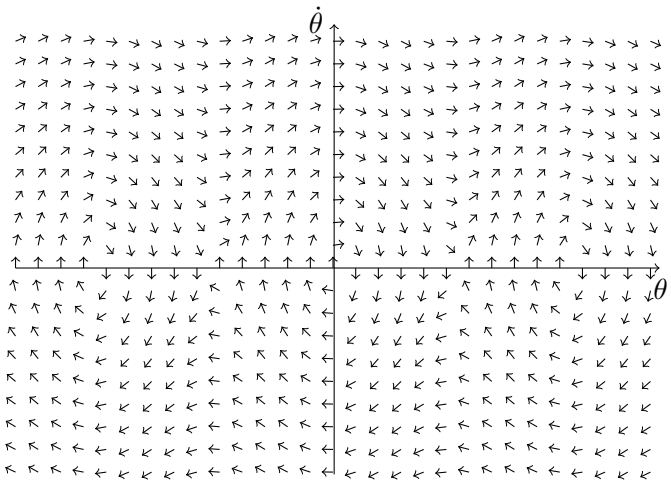
Le second champ de vecteur est le portrait de phase associé au pendule simple. L'angle θ que fait le pendule avec la verticale vérifie une équation différentielle de la forme $\ddot{\theta} + \sin(\theta) = 0$. On peut récrire cette équation sous forme d'un système d'ordre 1 :

$$\begin{cases} \theta' &= \dot{\theta} \\ (\dot{\theta})' &= \ddot{\theta} = -\sin(\theta) \end{cases}$$

On a représenté le champ associé à ce système.

1. Décrire ses différentes lignes de champ. À quels mouvements du pendule correspondent-elles ?
2. Déterminer leurs équations.
3. Quelle serait l'allure des lignes de champs si on ajoutait au modèle un terme de frottement ?





Exercice 5 **Divergence**

Calculer les divergences des champs de vecteurs des exercices précédents. Lesquels sont à flux conservatifs ?

Exercice 6 **Champ conservatif radial**

Soit ψ une fonction réelle dérivable.

1. Soit f le champ scalaire défini sur $\mathbf{R}^3$ par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3, \quad f(x,y,z) = \psi\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right).$$

Exprimer le gradient de f en fonction de ψ.

2. On considère une masse en l'origine. On fait l'hypothèse que le champ de gravitation $\vec{\varphi}$ associé est radial, invariant par rotation et à flux conservatif. Nous allons alors démontrer que sa norme est nécessairement « en $\frac{1}{r^2}$ ».

   (a) Justifier que $\vec{\varphi}$ est de la forme : $\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ \vec{\varphi}(x,y,z) = \psi\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

   où ψ est une fonction qu'on suppose dérivable.

   (b) Exprimer la divergence de $\vec{\varphi}$ en fonction de ψ.

   (c) Pour quelles fonctions ψ le champ $\vec{\varphi}$ est-il à divergence nulle ?

Exercice 7 **Champs scalaires**

Soit f et g les champs scalaires définis sur $\mathbf{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}, \qquad g(x,y) = x^2 - y^2.$$

1. Représenter les graphes de f et g (il s'agit de surfaces).
2. Déterminer les courbes de niveaux de f et g et les représenter.
3. Calculer leurs champs de gradient et les représenter sur les figures précédentes.
4. Déterminer les lignes de champ des gradients et les représenter aussi.

Exercice 8 **Champ de gradient**

On considère les champs vectoriels suivants.

$$\vec{\varphi}_1(x,y,z) = (4x-3y+z, -3x-y+z, x+y+z), \qquad \vec{\varphi}_2(x,y) = (xy, xy),$$
$$\vec{\varphi}_3(x,y,z) = (3-5y, -5x+2y+yz, xyz), \qquad \vec{\varphi}_4(x,y) = \left(\tfrac{x}{x^2+y^2}, \tfrac{y}{x^2+y^2}\right).$$

— Déterminer en utilisant le rotationnel si ces champs sont des champs de gradient.
— Lorsque c'est le cas, déterminer leur potentiel.

Exercice 9 **Champ magnétique**

On considère un fil infini parcouru par un courant I placé sur l'axe Oz. Le champ magnétique $\vec{B}$ induit est donné en coordonnées cylindriques par $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta$.

1. Représenter le champ $\vec{B}$.
2. Calculer $\vec{\mathrm{rot}}(B)$, soit en passant par les coordonnées cartésiennes du champ, soit en utilisant l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques.
3. Montrer que $\vec{B}$ n'est pas un champ de gradient sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0,0)\}$.

• Chapitre II.

Exercice 10 **Longueur d'une courbe**

Déterminer la longueur des courbes suivantes.

— La courbe définie par $y = \mathrm{ch}(x)$ pour $x \in [a, b]$.

— L'astroïde paramétrée par $(\cos^3(t), \sin^3(t))$ pour $t \in [0, 2\pi]$.

— La cardioïde paramétrée par $\gamma(t) = (\cos(t)(1-\cos(t)), \sin(t)(1-\cos(t)))$, pour $t \in [0, 2\pi]$.

— La spirale d'Archimède définie par l'équation polaire $r = \theta$, pour $\theta \in [0, 2\pi]$.

Exercice 11 **Circulation d'un champ**

On considère les champs de vecteurs

$$\vec{\varphi}_1(x, y) = (0, x), \quad \vec{\varphi}_2(x, y) = (x^2, y), \quad \vec{\varphi}_3(x, y) = (-y, x),$$

et les courbes suivantes : le cercle unité, le segment $[0, 2] \times \{1\}$ et la courbe d'équation $y = x^n$, pour $n \geq 1$ et $x \in [0, 1]$.

Représenter ces chemins (en les orientant) et les champs. Estimer puis calculer la circulation de chacun des champs le long de chacun de ces chemins.

Exercice 12 **Formes différentielles exactes**

Les formes différentielles suivantes sont-elles exactes ?

$$\omega_1(x, y) = y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y, \qquad \omega_2(x, y) = 2x\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y, \qquad \omega_3(x, y) = \frac{y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{y^2}.$$

Calculer leur intégrale curviligne le long des chemins de l'exercice précédent.

Exercice 13 **Intégrale curviligne**

Soit ω la forme différentielle définie sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par $\omega(x, y) = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}\mathrm{d}x + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\mathrm{d}y$.

— Calculer l'intégrale curviligne de ω le long du cercle unité.

— Cette forme différentielle est-elle exacte ?

— Montrer que ω est localement une différentielle. Faire le lien avec l'exercice sur le champ magnétique.

Exercice 14 **Aire délimitée par une courbe**

— En utilisant la formule du cours, retrouver le fait que l'aire sous le graphe d'une fonction f est donnée par l'intégrale de f.

— Déterminer l'aire du domaine délimité par la lemniscate de Bernoulli $\gamma(t) = (\sin(t), \cos(t)\sin(t))$, pour $t \in [0, 2\pi]$.

— Déterminer les aires des domaines délimités par l'astroïde et la cardioïde.

• Chapitre III.

Exercice 15 **Intégrales doubles**

Calculer

— $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 1,\ y > 1,\ x+y < 3\}$.

— $\displaystyle\iint_D \cos(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\}$.

— $\displaystyle\iint_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où D est délimité par les courbes d'équations $y = x$, $y = x^2$ et $x = 1$.

— $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x^2+y^2 \leqslant 2\}$.

— $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x < 0, y > 0, x^2+y^2 \leqslant 4\}$.

Exercice 16 **Centre de gravité**

On considère une plaque homogène représentée par une partie D du plan. Le centre de gravité de la plaque est le point $G = (x_G, y_G)$ donné par

$$x_G = \frac{1}{\mathcal{A}(D)}\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad y_G = \frac{1}{\mathcal{A}(D)}\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

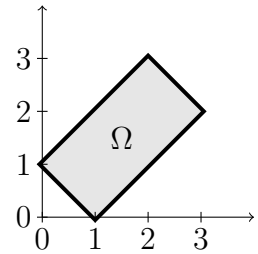
Retrouver ainsi le centre de gravité pour des plaques de formes simples.

Déterminer le centre de gravité de $D = \{(x,y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\}$.

En adaptant les définitions, déterminer le centre de gravité d'une demi-boule de rayon R.

Exercice 17 **Changement de variable**

On considère le rectangle Ω représenté ci-contre.



Après avoir déterminé les équations des bords de Ω, proposer un changement de variable adapté à Ω et calculer l'intégrale

$$\iint_\Omega x^2 - 3y\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Exercice 18 Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes du plan d'équations $y = ax$, $y = bx$, $y = \frac{c}{x}$ et $y = \frac{d}{x}$ avec $0 < a < b$ et $0 < c < d$.

On utilisera le changement de variable $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$.

Exercice 19 **Volumes**

Déterminer le volume intérieur à l'ellipsoïde d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Soit $a \in]0,1[$ et S l'ensemble des points de la forme $(u\cos(t), u\sin(t), \sin(t))$ pour $t \in [0,\pi]$ et $u \in [a,1]$ (S est une surface).

Déterminer le volume situé entre la surface S et la plan Oxy.

• Chapitres IV. et V.

Exercice 20 **Flux à travers une surface**

On considère les champs de vecteurs suivants :

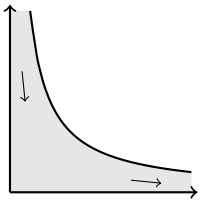
$$\vec{\varphi}_1(x,y,z) = (0,1,a), \qquad \vec{\varphi}_2(x,y,z) = (-y,x,0),$$

et les surfaces suivantes : le carré $[-1,1] \times \{0\} \times [-1,1]$, la sphère de centre 0 et de rayon R et la surface définie par $z = xy$ pour $x, y \in [-1,1]$.

Calculer les flux des deux champs à travers ces trois surfaces.

Exercice 21 **Débit**

On considère un tuyau vu du dessus, délimité par $0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x}$ et un écoulement dans le tuyau dont la vitesse est définie par $\vec{v}(x,y) = (x,-y)$.



1. Montrer que l'écoulement est tangent aux bords du tuyau.
2. Montrer qu'il s'effectue à débit constant.
3. Calculer ce débit à travers une section du tuyau. (Il faut adapter la définition du flux à un champ de $\mathbf{R}^2$.)

Exercice 22 **Formule de Green-Riemann**

On considère le chemin formé de segments reliant dans l'ordre les points $(-1,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(-1,-1)$ et $(-1,0)$.

Soit $\varphi(x,y) = (y^2, x)$. Calculer la circulation de ce champ le long du chemin.

Exercice 23 **Formule de Stokes**

1. On considère le chemin formé de segments reliant dans l'ordre les points $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$, $(0,1,1)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,0)$.
   Soit $\varphi(x,y) = (y,-x,z)$. Calculer la circulation de ce champ le long du chemin.
2. Soit γ le cercle unité dans le plan Oxy et soit $\varphi(x,y,z) = (xz - e^x, yz + \cos(y), x^2+y^2+z^2)$. Calculer la circulation de ce champ le long de γ.
   Pour quelles courbes γ obtiendrait-on le même résultat ?
   Mêmes questions avec le champ $\psi(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)\varphi(x,y,z)$.
3. Soit $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos(2t))$ la courbe de la crêpe. Elle est située sur un cylindre et sur une quadrique que l'on peut déterminer.
   Soit $\varphi(x,y,z) = (y,-x,z)$. Calculer la circulation de φ le long de γ.
   Soit $\varphi(x,y,z) = (5xz, \frac{x}{2} + yz, 2x^2 + y^2 + e^z)$. Calculer la circulation de φ le long de γ.

Exercice 24 **Théorème d'Ampère**

On considère un champ magnétique $\vec{B}$ induit par un courant. Le lien entre $\vec{B}$ et le courant est donné par $\vec{\text{rot}}(B) = \mu_0 \vec{J}$, où μ_0 est la perméabilité du vide et $\vec{J}$ désigne le vecteur densité de courant.

1. Appliquer le théorème de Stokes à $\vec{B}$ et reconnaître le théorème d'Ampère.
2. On considère un fil infini situé sur l'axe Oz parcouru par un courant d'intensité I. Le champ magnétique induit est alors donné par $\vec{B}(r, \theta, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta$.
   Calculer directement la circulation de $\vec{B}$ le long d'un cercle situé autour du fil. Faire de même pour n'importe quel chemin fermé avec le théorème d'Ampère.
3. On considère une spire (*i.e.* un cercle) parcouru par un courant d'intensité I. Déterminer la circulation du champ magnétique induit le long d'une courbe fermée de l'espace. On distinguera plusieurs cas.

Exercice 25 **Formule de Green-Ostrogradski**

Soit S la demi-sphère unité (pour $z \geq 0$) et soit $\vec{\varphi}(x, y, z) = (xz, -yz, 3z - 2)$.

Calculer le flux de $\vec{\varphi}$ à travers S en se ramenant à une surface plus simple à l'aide de la formule de G-O.

Exercice 26 **Théorème de Gauss**

On considère une charge ponctuelle q située en $(0, 0, 0)$. Le champ électrique créé est de la forme $\vec{E}(r, \theta, \varphi) = \frac{\lambda}{r^2}\vec{u}_r$ avec $\lambda = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}$.

1. Calculer la divergence de E. *Chercher la formule en sphérique ou repasser en cartésien.*
2. Soit S une sphère centrée en $(0, 0, 0)$. Calculer le flux de $\vec{E}$ à travers S.
   Cela contredit-il la formule de G-O ?
3. Soit S une surface fermée quelconque. Montrer que le flux de $\vec{E}$ à travers S ne dépend que de la présence de la charge à l'intérieur de S.
   On se ramènera au cas de la sphère à l'aide de la formule de G-O.
4. Généraliser au cas où il y a plusieurs charge

Exercice 27 **Effet Venturi**

On considère un fluide s'écoulant dans un tube dont la section varie. La section où entre le fluide est d'aire A_1 et celle où il sort est d'aire A_2. L'effet Venturi est le fait que l'écoulement du fluide sera accéléré ou ralenti dans le tube à cause de ces différences d'aires. Si on note v_1 et v_2 les vitesses du fluide en entrée et en sortie, leur rapport est donné par $\frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1}$.

Cette formule est en fait une conséquence de la formule de Green-Ostrogradski. Préciser toutes les hypothèses simplificatrices considérées pour obtenir la formule de l'effet Venturi.