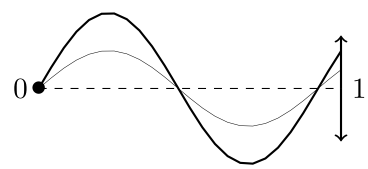
Contrôle 2

Les documents et la calculatrice sont interdits.
Toutes les réponses doivent être justifiées et correctement rédigées.

Exercice 1 : corde de Melde **(10 points)**

On considère une corde de longueur 1. Elle est initialement au repos. Une de ses extrémités est fixée et l'autre est excitée à une pulsation α. On note $y(x,t)$ sa hauteur en x à l'instant t. Son évolution est modélisée par

$$(E) : \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \nu^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$



avec les conditions au bord

$$\forall t, \quad y(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad y(1,t) = \sin(\alpha t),$$

où α est un réel différent de $\nu k \pi$ pour tout k.

I. Résolution

Pour résoudre ce problème, nous allons commencer par en chercher une solution particulière ; puis nous obtiendrons la solution générale en ajoutant la solution du problème homogène associé (étudié en cours) ; enfin nous déterminerons la solution correspondant aux conditions initiales du problème.

Posons $y_p(x,t) = U(x)\sin(\alpha t)$.

1. Montrer que y_p est solution de l'équation (E) si et seulement si U est solution d'une certaine équation différentielle.
2. La résoudre puis déterminer les paramètres de U tels que y_p vérifie les conditions aux bords du problème.

L'équation (E) étant linéaire, sa solution générale est la somme d'une solution particulière et de la solution du problème homogène associé. D'après le cours, on en déduit que cette solution générale est de la forme

$$y(x,t) = y_p(x,t) + \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(k\pi x)(A_k \cos(\nu k \pi t) + B_k \sin(\nu k \pi t)).$$

3. On rappelle que la corde est au repos à l'instant $t = 0$. À l'aide de cette donnée, montrer que les coefficients A_k et B_k sont les coefficients de Fourier de fonctions que l'on précisera. On ne demande pas de les exprimer sous forme intégrale, ni encore moins de les calculer.

II. Interprétation

Fixons $\nu = 1$ dans cette partie. Les pulsations propres de la corde sont alors d'après le cours les multiples de π.

D'après ce qui précède, une solution du problème général (sans les conditions initiales) est de la forme

$$y(x,t) = \frac{\sin(\alpha x)\sin(\alpha t)}{\sin(\alpha)}.$$

1. Prenons $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Représenter la solution ci-dessus pour $x = [0,1]$ à l'instant $t = 0$. La représenter également (sur la même figure) aux instants $t = 1$, $t = 2$ et $t = 3$.
2. Faire de même avec $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ aux instants $t = \frac{1}{3}$, $t = \frac{2}{3}$ et $t = 1$.
3. Quelles différences y a-t-il entre ces deux vibrations de la corde ?
4. Considérer maintenant une valeur de α proche de π. Représenter l'allure de la vibration de la corde dans ce cas. Commenter.

Exercice 2 : corde de Melde libre **(13 points)**

Avant de présenter le problème, qui est une variation de l'exercice 1, nous traitons plusieurs aspects calculatoires.

Propriétés utiles :

Si $\varphi(x) = f(x+a)$, alors $\widehat{\varphi}(\omega) = \widehat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega}$; si $\psi(x) = f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}bx}$, alors $\widehat{\psi}(\omega) = \widehat{f}(\omega - b)$;

$$\widehat{f'}(\omega) = \mathrm{i}\omega\widehat{f}(\omega) \qquad ; \qquad \widehat{\delta_0}(\omega) = 1$$

I. Préliminaires

On définit la fonction h par $h(x) = \frac{1}{2}$ si $x > 0$ et $h(x) = -\frac{1}{2}$ si $x < 0$.

On admet que sa transformée de Fourier est définie par $\widehat{h}(\omega) = \dfrac{1}{\mathrm{i}\omega}$ pour $\omega \neq 0$ (et $\widehat{h}(0) = 0$ mais nous ne nous en servirons pas).

Les quatre questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit $\omega \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$. Résoudre l'équation différentielle : $f''(t) + \omega^2 f(t) = 2\cos(t)$.
2. Donner, en justifiant, la relation entre la transformée de Fourier d'une fonction et celle de sa dérivée seconde.
3. Représenter les graphes des fonctions

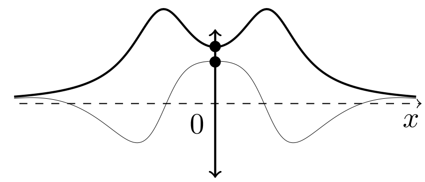
$$x \mapsto h(x+1) - h(x-1) \qquad \text{et} \qquad x \mapsto h(x+1) + h(x-1) - 2h(x).$$

4. (a) Déterminer la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto h(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.
   (b) Déterminer, à l'aide de h, la fonction $g(x)$ telle que : $\widehat{g}(\omega) = \frac{2}{\omega^2-1} = \frac{1}{\omega-1} - \frac{1}{\omega+1}$.
   (c) Soit $t \in \mathbf{R}$ fixé. Déterminer une fonction $\ell(x)$ telle que $\widehat{\ell}(\omega) = \frac{2}{\omega^2-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$.

II. Résolution du problème

On considère une corde de longueur infinie sans contrainte de bords. Comme dans l'exercice 1, la corde est initialement au repos et est excitée à l'instant $t = 0$ en un point à une certaine pulsation. Cette excitation sera cette fois en $x = 0$ et non plus en $x = 1$.

Le problème peut se modéliser ainsi (avec $\nu = 1$) :



$$(\tilde{E}) : \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2\cos(t)\delta_0(x),$$

avec les conditions initiales : $y(x, 0) = 0$ et $\dfrac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0$.

1. Passer à la transformée de Fourier en x dans l'équation $(\tilde{E})$. On admet qu'on peut intervertir transformée en x et dérivation en t : $\widehat{\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}} = \dfrac{\partial^2 \widehat{y}(\omega, t)}{\partial t^2}$
2. On obtient une équation différentielle en la variable t. La résoudre et justifier ainsi que :

$$\hat{y}(\omega, t) = A_\omega \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + B_\omega \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \frac{2}{\omega^2 - 1}\cos(t).$$

3. À l'aide des conditions initiales, déterminer les expressions de A_ω et B_ω.
4. Déduire grâce à la question I.4 l'expression de $y(x, t)$.

   Après simplifications (nécessitant de la trigonométrie et les résultats de la question I-3), on admet que l'on obtient l'expression :

$$y(x,t) = \begin{cases} \sin(t - x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant t \\ \sin(t + x) & \text{si } -t \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5. Comment évolue la corde en $x = 0$?
6. Représenter l'allure de la corde à différents instants.