Contrôle

Le polycopié de cours est autorisé, la calculatrice est interdite.
Toutes les réponses doivent être justifiées et correctement rédigées.

Exercice 1 : Température oscillante (9 pts)

On considère une barre métallique de longueur π initialement à température nulle. Elle est en contact en une extrémité avec un milieu à température nulle. En l'autre extrémité, on fait varier la température de manière sinusoïdale. On souhaite décrire l'évolution de la température dans la barre.

Cette évolution est décrite par l'équation de la chaleur : $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.
Les conditions aux bords sont données par : $\forall t > 0, \quad T(0,t) = 0, \qquad T(\pi, t) = \sin(2t)$.

Les solutions de ce nouveau problème sont les sommes des solutions du problème homogène étudié en cours et d'une solution particulière que nous allons déterminer. Afin de tenir compte de la condition en $x = 0$, nous allons chercher une telle solution sous la forme

$$T_p(x,t) = U_1(x)\sin(2t) + U_2(x)\cos(2t).$$

1. Injecter T_p dans l'équation de la chaleur et montrer que U_1 et U_2 doivent satisfaire : $U_1''(x) = -2U_2(x)$ et $U_2''(x) = 2U_1(x)$.
2. En déduire que U_1 et U_2 sont solutions d'une équation différentielle d'ordre 4. En donner le polynôme caractéristique.
3. La résolution de ces équations (qui n'est pas demandée) aboutit aux candidats suivants :

$$U_1(x) = \alpha \mathrm{sh}(x)\cos(x), \qquad U_2(x) = \alpha \mathrm{ch}(x)\sin(x).$$

   Vérifier qu'on obtient bien ainsi une solution $T_p(x,t)$ de l'équation de la chaleur et déterminer la valeur de α pour que les conditions aux bords soient satisfaites.

   La solution générale du problème est la somme $T_p(x,t) + T(x,t)$ de notre solution particulière et de la solution générale T du problème étudié en cours rappelée plus bas.

4. À l'aide de la condition initiale, déterminer l'expression des coefficients A_k sous forme intégrale. On ne demande pas de calculer ces intégrales.

Rappel : la température d'une barre métallique de longueur L, en contact en ses deux extrémités avec un milieu à $0°$, de température initiale $T_0(x) = T(x,0)$, est donnée par :

$$T(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin(\tfrac{k\pi}{L}x)\mathrm{e}^{-ct\frac{\pi^2 k^2}{L^2}} \quad \textit{avec} \quad \forall k, \quad A_k = \frac{2}{L}\int_0^L T_0(x)\sin(\tfrac{k\pi}{L}x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 2 : corde vibrante excitée **(12 pts)**

On considère une corde vibrante initialement au repos. À partir de $t = 0$, elle est mise en mouvement en $x = 0$ avec une oscillation verticale sinusoïdale. Pour simplifier les calculs et raisonnements, nous travaillerons avec des fonctions complexes. Le problème est alors modélisé ainsi :

$$\forall x, \quad y(x,0) = 0 \text{ et } \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0.$$

$$\forall t > 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}\delta_0(x) \qquad (E)$$

où δ_0 désigne l'impulsion de Dirac en $x = 0$ et α est la pulsation de l'oscillation imposée en $x = 0$.

Propriétés utiles :

$$\widehat{f'}(\omega) = \mathrm{i}\omega \hat{f}(\omega) \qquad \hat{\delta}_0(\omega) = 1$$

$$\widehat{f(x+a)}(\omega) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega}\hat{f}(\omega) \qquad \widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}f(x)}(\omega) = \hat{f}(\omega - a)$$

1. **Préliminaires**

   On note u la fonction échelon définie par $u(x) = 1$ si $x > 0$ et $u(x) = 0$ sinon. On admet qu'en un certain sens, la dérivée de u est donnée par $u'(x) = \delta_0(x)$.

   (a) En déduire, avec la propriété de dérivation de la transformée de Fourier, que pour $\omega \neq 0$, $\hat{u}(\omega) = -\dfrac{\mathrm{i}}{\omega}$.

   (b) Montrer que si $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}u(x+t)$, alors $\hat{f}(\omega) = -\dfrac{\mathrm{i}}{\omega - a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-a)t}$.

2. **Résolution du problème**

   (a) Passer à la transformée de Fourier en x dans l'équation (E).

   On rappelle que $\widehat{\dfrac{\partial y}{\partial t}} = \dfrac{\partial \hat{y}}{\partial t}$.

   (b) On obtient une équation d'ordre 2 en t satisfaite par $\hat{y}(\omega, t)$. La résoudre et déduire :

   $$\hat{y}(\omega, t) = A_\omega \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + B_\omega \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \frac{1}{\omega^2 - \alpha^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}.$$

   (c) D'après les conditions initiales, que valent $\hat{y}(\omega, 0)$ et $\frac{\partial \hat{y}}{\partial t}(\omega, 0)$?
   En déduire les expressions de A_ω et B_ω.

   En décomposant les différentes fractions obtenues, on conclut :

   $$\hat{y}(\omega,t) = \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{1}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \frac{1}{\omega-\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \frac{1}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \frac{1}{\omega+\alpha}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} - \frac{1}{\omega+\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t} + \frac{1}{\omega-\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}\right).$$

   (d) Déduire à l'aide des préliminaires l'expression de $y(x,t)$.
   Remarque : pour obtenir une solution plus lisible, il faudrait se replacer dans le contexte réel. Il faudrait aussi être un peu plus rigoureux avec nos transformées de Fourier. Nous avons passé sous silence la valeur de $\hat{u}(0)$. Il faudrait se placer dans le cadre de la théorie des distributions pour traiter cela et comprendre que ce n'est pas exactement al fonction u qui apparaît ci-dessus, mais la fonction impaire $u - \frac{1}{2}$. Tous les autres raisonnements de cet exercice restent valables.

   (e) Comment oscille la corde au cours du temps ?