Contrôle

Le polycopié de cours est autorisé, la calculatrice est interdite.
Toutes les réponses doivent être justifiées et correctement rédigées.

Exercice 1 : Température oscillante (9 pts)

On considère une barre métallique de longueur π initialement à température nulle. Elle est en contact en une extrémité avec un milieu à température nulle. En l'autre extrémité, on fait varier la température de manière sinusoïdale. On souhaite décrire l'évolution de la température dans la barre.

Cette évolution est décrite par l'équation de la chaleur : $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.
Les conditions aux bords sont données par : $\forall t > 0, \quad T(0,t) = 0, \qquad T(\pi, t) = \sin(2t)$.

Les solutions de ce nouveau problème sont les sommes des solutions du problème homogène étudié en cours et d'une solution particulière que nous allons déterminer. Afin de tenir compte de la condition en $x = 0$, nous allons chercher une telle solution sous la forme

$$T_p(x,t) = U_1(x)\sin(2t) + U_2(x)\cos(2t).$$

1. Injecter T_p dans l'équation de la chaleur et montrer que U_1 et U_2 doivent satisfaire : $U_1''(x) = -2U_2(x)$ et $U_2''(x) = 2U_1(x)$.

   $\frac{\partial T}{\partial t} = 2U_1(x)\cos(2t) - 2U_2(x)\sin(2t)$ et $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = U_1''(x)\sin(2t) + U_2'(x)\cos(2t)$, donc T est solution de l'équation ssi $2U_1(x)\cos(2t) - 2U_2(x)\sin(2t) = U_1''(x)\sin(2t) + U_2'(x)\cos(2t)$. On reconnaît deux expression trigonométriques en la variable t ; ce sont des séries de Fourier dont on peut identifier les coefficients. Donc :

   $$U_1''(x) = -2U_2(x) \quad \text{et} \quad U_2''(x) = 2U_1(x).$$

2. En déduire que U_1 et U_2 sont solutions d'une équation différentielle d'ordre 4. En donner le polynôme caractéristique.

   On en déduit, en dérivant deux fois que $U_1^{(4)}(x) = -2U_2''(x) = -4U_1(x)$. On montre de même que $U_2^{(4)}(x) = 2U_1''(x) = -4U_2(x)$. Ainsi U_1 et U_2 sont solutions de l'équation d'ordre 4 $y^{(4)} + 4y = 0$ dont le polynôme caractéristique est $X^4 + 4$.

3. La résolution de ces équations (qui n'est pas demandée) aboutit aux candidats suivants :

   $$U_1(x) = \alpha \mathrm{sh}(x)\cos(x), \qquad U_2(x) = \alpha \mathrm{ch}(x)\sin(x).$$

   Vérifier qu'on obtient bien ainsi une solution $T_p(x,t)$ de l'équation de la chaleur et déterminer la valeur de α pour que les conditions aux bords soient satisfaites.

• Les fonctions U_1 et U_2 proposées satisfont la condition obtenue dans la question 1. En effet, $U_1'(x) = \alpha \mathrm{ch}(x)\cos(x) - \alpha \mathrm{sh}(x)\sin(x)$ et $U_1''(x) = \alpha \mathrm{sh}(x)\cos(x) - \alpha \mathrm{ch}(x)\sin(x) - \alpha \mathrm{ch}(x)\sin(x) - \alpha \mathrm{sh}(x)\cos(x) = -2\alpha \mathrm{ch}(x)\sin(x) = -2U_2(x)$. Et on vérifie de même que $U_2''(x) = 2U_1(x)$. Ainsi $T_p(x,t) = U_1(x)\sin(2t) + U_2(x)\cos(2t)$ est bien solution de l'équation de la chaleur.
• En $x = 0$, $T_p(0,t) = U_1(0)\sin(2t) + U_2(0)\cos(2t) = 0$ car $\mathrm{sh}(0) = 0$ et $\sin(0) = 0$. Cette condition au bord est donc naturellement satisfaite par T_p.
• En $x = \pi$, $T_p(\pi,t) = U_1(\pi)\sin(2t) + U_2(\pi)\cos(2t) = -\alpha \mathrm{sh}(\pi)\sin(2t)$ car $\cos(\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = 0$. Pour que $T_p(\pi,t) = \sin(2t)$ pour tout t, il faut que $-\alpha \mathrm{sh}(\pi) = 1$ donc que $\alpha = -\frac{1}{\mathrm{sh}(\pi)}$.

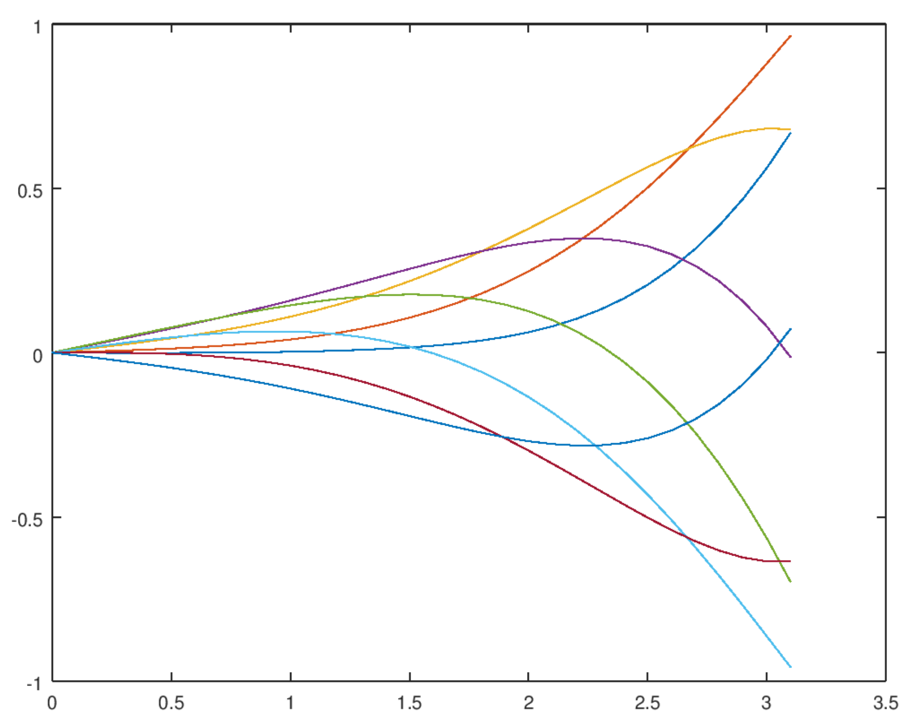
La solution générale du problème est la somme $T_p(x,t) + T(x,t)$ de notre solution particulière et de la solution générale T du problème étudié en cours rappelée plus bas.

4. À l'aide de la condition initiale, déterminer l'expression des coefficients A_k sous forme intégrale. On ne demande pas de calculer ces intégrales.

La solution T est de la forme $T(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin(kx)\mathrm{e}^{-ck^2t}$. La température dans la barre est initialement nulle, donc, à $t = 0$, $T_p(x,0) + T(x,0) = 0$, donc $\alpha \mathrm{ch}(x)\sin(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin(kx) = 0$. Autrement dit, $\sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin(kx) = -\alpha \mathrm{ch}(x)\sin(x)$ et les coefficients A_k sont donc les coefficients de Fourier de la fonction $-\alpha \mathrm{ch}(x)\sin(x)$:

$$\forall k, \quad A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{\mathrm{sh}(\pi)}\mathrm{ch}(x)\sin(x)\sin(kx)\mathrm{d}x.$$

Ces coefficients peuvent se calculer et nous sommes alors capable de décrire la température dans la barre à tout instant. Nous avons ainsi représenté la répartition de la température à différents instant. On observe bien l'oscillation en $x = \pi$ et comment elle se propage dans la barre.



Rappel : la température d'une barre métallique de longueur L, en contact en ses deux extrémités avec un milieu à $0°$, de température initiale $T_0(x) = T(x,0)$, est donnée par :

$$T(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin(\tfrac{k\pi}{L}x)\mathrm{e}^{-ct\frac{\pi^2 k^2}{L^2}} \quad \textit{avec} \quad \forall k, \quad A_k = \frac{2}{L}\int_0^L T_0(x)\sin(\tfrac{k\pi}{L}x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 2 : corde vibrante excitée (12 pts)

On considère une corde vibrante initialement au repos. À partir de $t = 0$, elle est mise en mouvement en $x = 0$ avec une oscillation verticale sinusoïdale. Pour simplifier les calculs et raisonnements, nous travaillerons avec des fonctions complexes. Le problème est alors modélisé ainsi :

$$\forall x, \quad y(x,0) = 0 \text{ et } \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0.$$

$$\forall t > 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}\delta_0(x) \qquad (E)$$

où δ_0 désigne l'impulsion de Dirac en $x = 0$ et α est la pulsation de l'oscillation imposée en $x = 0$.

Propriétés utiles :

$$\widehat{f'}(\omega) = \mathrm{i}\omega \hat{f}(\omega) \qquad \hat{\delta}_0(\omega) = 1$$

$$\widehat{f(x+a)}(\omega) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega}\hat{f}(\omega) \qquad \widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}f(x)}(\omega) = \hat{f}(\omega - a)$$

1. **Préliminaires**

   On note u la fonction échelon définie par $u(x) = 1$ si $x > 0$ et $u(x) = 0$ sinon. On admet qu'en un certain sens, la dérivée de u est donnée par $u'(x) = \delta_0(x)$.

   (a) En déduire, avec la propriété de dérivation de la transformée de Fourier, que pour $\omega \neq 0$, $\hat{u}(\omega) = -\dfrac{\mathrm{i}}{\omega}$.

   En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier : $\hat{u'}(\omega) = \mathrm{i}\omega\hat{u}(\omega)$ et $\hat{u'}(\omega) = \hat{\delta}_0(\omega) = 1$. On en déduit que $\mathrm{i}\omega\hat{u}(\omega) = 1$, donc pour $\omega \neq 0$, $\hat{u}(\omega) = \frac{1}{\mathrm{i}\omega} = -\frac{\mathrm{i}}{\omega}$.

   (b) Montrer que si $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}u(x+t)$, alors $\hat{f}(\omega) = -\dfrac{\mathrm{i}}{\omega - a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-a)t}$.

   Notons $g(x) = u(x+t)$. Alors $\hat{g}(\omega) = e^{\mathrm{i}t\omega}\hat{u}(\omega) = -e^{\mathrm{i}t\omega}\frac{\mathrm{i}}{\omega}$. Or $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}g(x)$, donc $\hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega - a) = -e^{\mathrm{i}t(\omega-a)}\frac{\mathrm{i}}{\omega-a}$.

2. **Résolution du problème**

   (a) Passer à la transformée de Fourier en x dans l'équation (E).

   On rappelle que $\widehat{\dfrac{\partial y}{\partial t}} = \dfrac{\partial \hat{y}}{\partial t}$.

   D'après les propriétés de la transformée de Fourier, on a, en rappelant que la variable est x : $\widehat{\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}} = \dfrac{\partial^2 \hat{y}}{\partial t^2}$, $\widehat{\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = -\omega^2\hat{y}$ et $\widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}\delta_0(x)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}\hat{\delta}_0(\omega) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}$. On obtient ainsi l'équation

   $$\frac{\partial^2 \hat{y}}{\partial t^2} = -\omega^2\hat{y} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}.$$

   (b) On obtient une équation d'ordre 2 en t satisfaite par $\hat{y}(\omega, t)$. La résoudre et déduire :

   $$\hat{y}(\omega, t) = A_\omega \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + B_\omega \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \frac{1}{\omega^2 - \alpha^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}.$$

On reconnaît une équation de la forme $f''(t)+\omega^2 f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}$. Son équation homogène a pour équation $f''+\omega^2 f = 0$, de polynôme caractéristique $X^2+\omega^2$. Ses racines sont $\pm\mathrm{i}\omega$ et les solutions de l'équation homogène sont de la forme $A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$.
On peut chercher une solution particulière de la forme $f_p(t) = \lambda \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}$. On l'injecte dans l'équation et on trouve la condition $\lambda = \frac{1}{\omega^2-\alpha^2}$.
On conclut que la solution générale est de la forme (en tenant compte du fait que les constantes peuvent dépendre de ω :

$$\hat{y}(\omega,t) = A_\omega \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + B_\omega \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \frac{1}{\omega^2-\alpha^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}.$$

(c) D'après les conditions initiales, que valent $\hat{y}(\omega,0)$ et $\frac{\partial \hat{y}}{\partial t}(\omega,0)$?
En déduire les expressions de A_ω et B_ω.

À l'instant $t=0$, on a d'après l'énoncé : $y(x,0)=0$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$. On passe à la transformée en x : $\hat{y}(\omega,0) = \hat{0} = 0$ et (en utilisant l'interversion de la transformée en x et de la dérivée en t) $\frac{\partial \hat{y}}{\partial t}(\omega,0) = 0$.
D'après la question précédente, ces conditions deviennent :

$$A_\omega + B_\omega + \frac{1}{\omega^2-\alpha^2} = 0, \qquad \mathrm{i}\omega A_\omega - \mathrm{i}\omega B_\omega + \frac{\mathrm{i}\alpha}{\omega^2-\alpha^2} = 0.$$

On résout ce système et on obtient finalement :

$$A_\omega = -\frac{\omega+\alpha}{2\omega(\omega^2-\alpha^2)} = \frac{1}{2\omega(\alpha-\omega)} \qquad B_\omega = -\frac{\omega-\alpha}{2\omega(\omega^2-\alpha^2)} = -\frac{1}{2\omega(\alpha+\omega)}.$$

En décomposant les différentes fractions obtenues, on conclut :

$$\hat{y}(\omega,t) = \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{1}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \frac{1}{\omega-\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \frac{1}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \frac{1}{\omega+\alpha}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} - \frac{1}{\omega+\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t} + \frac{1}{\omega-\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}\right).$$

(d) Déduire à l'aide des préliminaires l'expression de $y(x,t)$.

Chaque terme de cette somme ressemble (éventuellement à un facteur près) à la transformée de Fourier calculée à la question 1-b. Par linéarité et par unicité de la transformée de Fourier, on déduit que y est donnée par :

$$y(x,t) = \frac{1}{2\alpha}(\mathrm{i}u(x+t) - \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}u(x+t) - \mathrm{i}u(x-t) + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x}u(x-t)$$
$$-\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x}u(x) + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}u(x)).$$

Remarque : pour obtenir une solution plus lisible, il faudrait se replacer dans le contexte réel. Il faudrait aussi être un peu plus rigoureux avec nos transformées de Fourier. Nous avons passé sous silence la valeur de $\hat{u}(0)$. Il faudrait se placer dans le cadre de la théorie des distributions pour traiter cela et comprendre que ce n'est pas exactement al fonction u qui apparaît ci-dessus, mais la fonction impaire $u-\frac{1}{2}$. Tous les autres raisonnements de cet exercice restent valables.

(e) Comment oscille la corde au cours du temps ?

La corde est initialement au repos. L'excitation sinusoïdale en $x = 0$ va créer une onde, elle aussi sinusoïdale de même pulsation a qui va se propager des deux côtés. Ainsi à tout instant t, la corde a une allure de sinusoïde pour $x \in [-\alpha t, \alpha t]$ et est encore au repos au-delà.