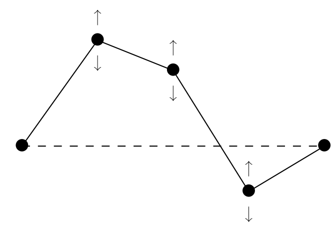
Contrôle 2

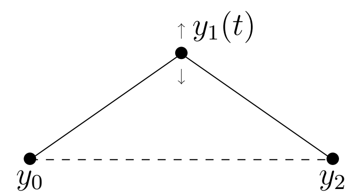
Le polycopié de cours est autorisé, la calculatrice est interdite.
Toutes les réponses doivent être justifiées et correctement rédigées.

Exercice 1 : corde vibrante discrète (12 pts)



Nous considérons une version discrétisée du problème de la corde vibrante : la corde est constituée de masses reliées entre elles par des fils élastiques de poids négligeable, les masses situées aux extrémités restant immobiles.

1. **Une masse vibrante**



Commençons par le cas le plus simple : la corde est constituée de 3 masses, dont seule la masse centrale vibre verticalement. Les masses sont numérotées 0 , 1 et 2 et on note $y_i(t)$ la hauteur de la masse i à l'instant t.

Les conditions aux bords sont : $\forall t,\ y_0(t) = 0$ et $y_2(t) = 0$.
L'équation des ondes devient, après discrétisation du laplacien :

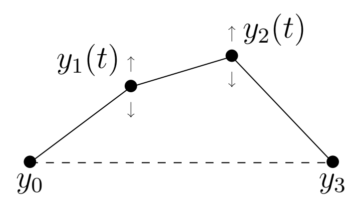
$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}(t) = y_2(t) + y_0(t) - 2y_1(t).$$

(a) Résoudre cette équation et déterminer ainsi toutes les vibrations possible de ce système. Quelle est l'unique fréquence (ou pulsation) propre de ce système ?

(b) On ajoute les conditions initiales $y_1(0) = 1$ et $y_1'(0) = 0$. Déterminer la solution correspondante.

2. **Deux masses vibrantes**

On considère maintenant un système de 4 masses liées entre elles, numérotées de 0 à 3. Les conditions aux bords sont : $\forall t,\ y_0(t) = 0$ et $y_3(t) = 0$.
L'équation des ondes, appliquée en les masses 1 et 2, fournit le système différentiel suivant :



$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1''(t) & = & y_2(t) + y_0(t) - 2y_1(t) \\ y_2''(t) & = & y_3(t) + y_1(t) - 2y_2(t) \end{array}\right.$$

Nous commençons par chercher les solutions stationnaires du problème. Il s'agit ici d'une solution décrite par deux fonctions y_1 et y_2 non nulles de la forme

$$y_1(t) = a_1 V(t), \qquad y_2(t) = a_2 V(t)$$

(La composante temporelle est indépendante de la position.)

(a) Injecter ces fonctions dans le système et isoler le terme $\dfrac{V''(t)}{V(t)}$ dans chaque équation.

(b) En déduire que $a_2 = a_1$ ou $a_2 = -a_1$, puis conclure que les solutions stationnaires du problème sont les couples (y_1, y_2) de la forme

$$y_1(t) = y_2(t) = \lambda \cos(t) + \mu \sin(t) \quad \text{et} \quad \tilde{y}_1(t) = -\tilde{y}_2(t) = \tilde{\lambda} \cos(\sqrt{3}t) + \tilde{\mu} \sin(\sqrt{3}t),$$

avec $\lambda, \mu, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu} \in \mathbf{R}$.

(c) Représenter l'allure de la corde pour ces deux solutions stationnaires et préciser leur fréquence de vibration.

La solution générale du problème se décompose en une somme de ces deux solutions stationnaires : $\quad Y_1(t) = y_1(t) + \tilde{y}_1(t), \qquad Y_2(t) = y_2(t) + \tilde{y}_2(t) = y_1(t) - \tilde{y}_1(t).$

(d) À l'instant $t = 0$, la corde est décrite par les conditions initiales

$$Y_1(0) = 1, \quad Y_2(0) = 0, \quad Y_1'(0) = Y_2'(0) = 0.$$

Déterminer les coefficients de la solution $(Y_1(t), Y_2(t))$ correspondante.
Est-il facile de décrire son évolution au cours du temps ?

3. **Trois masses vibrantes**

La méthode décrite dans la partie précédente s'étend à plus de masses, mais les calculs sont évidemment plus importants.

Considérons maintenant cinq masses reliées entre elles. Sans justification mathématique, par simple analogie avec le cas précédent et la corde vibrante étudiée en cours, conjecturer l'allure des trois modes propres de vibration de ce système.

Exercice 2 : équation de transport (8 pts)

Soit $c > 0$. On considère l'équation aux dérivées partielles définie par

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \forall t \geqslant 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = c\frac{\partial f}{\partial x},$$

On ajoute la condition initiale :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x, 0) = f_0(x).$$

1. Passer à la transformée de Fourier <u>en x</u> dans l'équation de transport et en déduire que $\hat{f}$ est solution d'une équation différentielle de la variable t.

   On s'autorisera à écrire $\widehat{\dfrac{\partial f}{\partial t}} = \dfrac{\partial \hat{f}}{\partial t}$.
2. Résoudre cette équation différentielle et en déduire que $\quad \hat{f}(\omega, t) = \hat{f}_0(\omega)\mathrm{e}^{i\omega ct}$.
3. En déduire l'expression de la solution $f(x, t)$ du problème.

   Représenter une fonction f_0 quelconque et décrire l'évolution de f au cours du temps.
4. Recommencer l'exercice avec l'équation de transport modifiée $\quad \dfrac{\partial f}{\partial t} = c\dfrac{\partial f}{\partial x} - f$.

   Comment se comporte la solution de ce nouveau problème ?