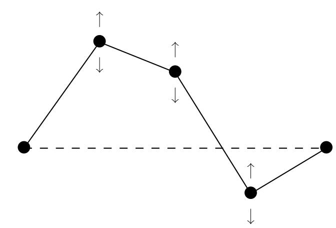
Contrôle 2

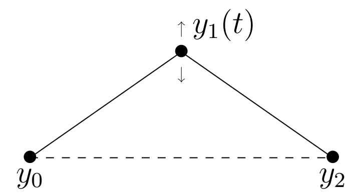
Le polycopié de cours est autorisé, la calculatrice est interdite.
Toutes les réponses doivent être justifiées et correctement rédigées.

Exercice 1 : corde vibrante discrète (12 pts)



Nous considérons une version discrétisée du problème de la corde vibrante : la corde est constituée de masses reliées entre elles par des fils élastiques de poids négligeable, les masses situées aux extrémités restant immobiles.

1. **Une masse vibrante**



Commençons par le cas le plus simple : la corde est constituée de 3 masses, dont seule la masse centrale vibre verticalement. Les masses sont numérotées 0 , 1 et 2 et on note $y_i(t)$ la hauteur de la masse i à l'instant t.

Les conditions aux bords sont : $\forall t,\ y_0(t) = 0$ et $y_2(t) = 0$.
L'équation des ondes devient, après discrétisation du laplacien :

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}(t) = y_2(t) + y_0(t) - 2y_1(t).$$

(a) Résoudre cette équation et déterminer ainsi toutes les vibrations possible de ce système. Quelle est l'unique fréquence (ou pulsation) propre de ce système ?

En utilisant les conditions aux bords, l'équation devient simplement

$$y_1''(t) = -2y_1(t).$$

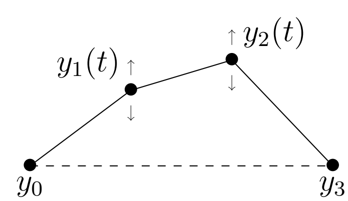
Ses solutions sont les fonctions de la forme $y_1(t) = a\cos(\sqrt{2}t) + b\sin(\sqrt{2}t)$.
Cela correspond à une oscillation verticale de la masse centrale avec une pulsation propre égale à $\sqrt{2}$.

(b) On ajoute les conditions initiales $y_1(0) = 1$ et $y_1'(0) = 0$. Déterminer la solution correspondante.

Reprenons la solution générale $y_1(t) = a\cos(\sqrt{2}t)+b\sin(\sqrt{2}t)$. La condition $y_1(0) = 1$ implique $a = 1$ et $y_1'(0) = 0$ implique $\sqrt{2}b = 0$, donc $b = 0$. La solution correspondante est donc $y_1(t) = a\cos(\sqrt{2}t)$.

2. **Deux masses vibrantes**

On considère maintenant un système de 4 masses liées entre elles, numérotées de 0 à 3. Les conditions aux bords sont : $\forall t,\ y_0(t) = 0$ et $y_3(t) = 0$.
L'équation des ondes, appliquée en les masses 1 et 2, fournit le système différentiel suivant :



$$\begin{cases} y_1''(t) &= y_2(t) + y_0(t) - 2y_1(t) \\ y_2''(t) &= y_3(t) + y_1(t) - 2y_2(t) \end{cases}$$

Nous commençons par chercher les solutions stationnaires du problème. Il s'agit ici d'une solution décrite par deux fonctions y_1 et y_2 non nulles de la forme

$$y_1(t) = a_1 V(t), \qquad y_2(t) = a_2 V(t)$$

(La composante temporelle est indépendante de la position.)

(a) Injecter ces fonctions dans le système et isoler le terme $\dfrac{V''(t)}{V(t)}$ dans chaque équation.

En utilisant les conditions aux bords et en injectant les expressions de y_1 et y_2, le système devient

$$\begin{cases} a_1 V''(t) &= a_2 V(t) - 2a_1 V(t) \\ a_2 V''(t) &= a_1 V(t) - 2a_2 V(t) \end{cases}$$

Comme on cherche des solutions particulières non nulles, on s'autorise à diviser par $V(t)$, a_1 et a_2, et on obtient

$$\begin{cases} \frac{V''(t)}{V(t)} &= \frac{a_2 - 2a_1}{a_1} \\ \frac{V''(t)}{V(t)} &= \frac{a_1 - 2a_2}{a_2} \end{cases}$$

(b) En déduire que $a_2 = a_1$ ou $a_2 = -a_1$, puis conclure que les solutions stationnaires du problème sont les couples (y_1, y_2) de la forme

$$y_1(t) = y_2(t) = \lambda \cos(t) + \mu \sin(t) \quad \text{et} \quad \tilde{y}_1(t) = -\tilde{y}_2(t) = \tilde{\lambda} \cos(\sqrt{3}t) + \tilde{\mu} \sin(\sqrt{3}t),$$

avec $\lambda, \mu, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu} \in \mathbf{R}$.

On identifie les deux expressions obtenues ci-dessus : $\frac{a_2 - 2a_1}{a_1} = \frac{a_1 - 2a_2}{a_2}$. Donc $a_2(a_2 - 2a_1) = a_1(a_1 - 2a_2)$. On développe et il reste $a_2^2 = a_1^2$. Donc $a_2 = \pm a_1$.

Si $a_1 = a_2$, les deux équations du système deviennent $V''(t) = -V(t)$. Donc $V(t)$ est de la forme $a\cos(t) + b\sin(t)$ et

$$y_1(t) = y_2(t) = a_1 V(t) = \lambda \cos(t) + \mu \sin(t),$$

avec $\lambda = a_1 a$ et $\mu = a_1 b$.

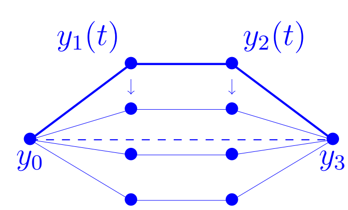
Si $a_1 = -a_2$, les deux équations du système deviennent $V''(t) = -3V(t)$. Donc $V(t)$ est de la forme $\tilde{a}\cos(\sqrt{3}t) + \tilde{b}\sin(\sqrt{3}t)$ et

$$y_1(t) = -y_2(t) = a_1 V(t) = \tilde{\lambda} \cos(\sqrt{3}t) + \tilde{\mu} \sin(\sqrt{3}t),$$

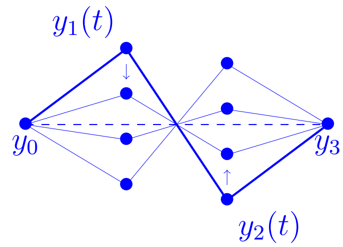
avec $\tilde{\lambda} = a_1 \tilde{a}$ et $\tilde{\mu} = a_1 \tilde{b}$.

(c) Représenter l'allure de la corde pour ces deux solutions stationnaires et préciser leur fréquence de vibration.

Le premier mode de vibration est obtenu pour $a_1 = a_2$: les deux masses oscillent en phase, de la même manière, avec une pulsation égale à 1.



Le second mode de vibration est obtenu pour $a_1 = -a_2$: les deux masses oscillent en opposition de phase, de la même manière, avec une pulsation égale à $\sqrt{3}$.



La solution générale du problème se décompose en une somme de ces deux solutions stationnaires : $\quad Y_1(t) = y_1(t) + \tilde{y}_1(t), \quad Y_2(t) = y_2(t) + \tilde{y}_2(t) = y_1(t) - \tilde{y}_1(t).$

(d) À l'instant $t = 0$, la corde est décrite par les conditions initiales

$$Y_1(0) = 1, \quad Y_2(0) = 0, \quad Y_1'(0) = Y_2'(0) = 0.$$

Déterminer les coefficients de la solution $(Y_1(t), Y_2(t))$ correspondante.
Est-il facile de décrire son évolution au cours du temps ?

La solution générale s'écrit

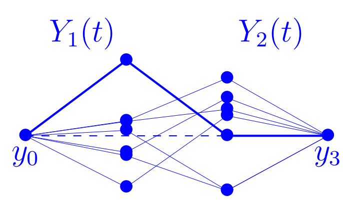
$$Y_1(t) = \lambda\cos(t) + \mu\sin(t) + \tilde{\lambda}\cos(\sqrt{3}t) + \tilde{\mu}\sin(\sqrt{3}t),$$

$$Y_2(t) = \lambda\cos(t) + \mu\sin(t) - \tilde{\lambda}\cos(\sqrt{3}t) - \tilde{\mu}\sin(\sqrt{3}t).$$

On cherche les quatre coefficients λ, $\tilde{\lambda}$, μ et $\tilde{\mu}$ à l'aide des quatre conditions initiales.
La condition $Y_1(0) = 1$ implique que $\lambda + \tilde{\lambda} = 1$.
La condition $Y_2(0) = 0$ implique que $\lambda - \tilde{\lambda} = 0$.
La condition $Y_1'(0) = 0$ implique que $\mu + \sqrt{3}\tilde{\mu} = 0$.
La condition $Y_2'(0) = 0$ implique que $\mu - \sqrt{3}\tilde{\mu} = 0$.
On en déduit $\lambda = \tilde{\lambda} = \frac{1}{2}$ et $\mu = \tilde{\mu} = 0$. La solution du problème est ainsi

$$Y_1(t) = \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\cos(\sqrt{3}t), \qquad Y_2(t) = \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}\cos(\sqrt{3}t).$$

Son évolution au cours du temps est difficile à écrire. Il ne s'agit pas d'une solution stationnaire, la forme globale de la corde ne sera pas préservée au cours du temps. Pire, les pulsations 1 est $\sqrt{3}$ ne sont pas commensurables (leur rapport est irrationnel) et Y_1 et Y_2 ne sont donc même pas des fonctions périodiques. L'évolution de la corde au cours du temps semble alors chaotique et il est difficile de décrire son comportement.

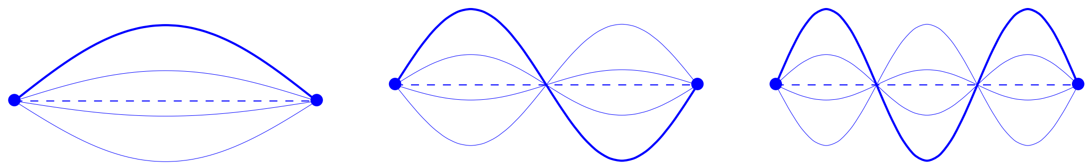


3. **Trois masses vibrantes**

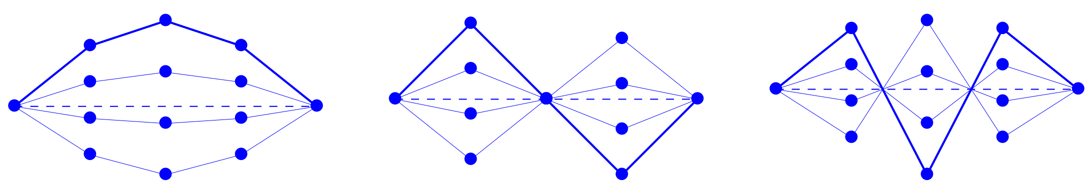
La méthode décrite dans la partie précédente s'étend à plus de masses, mais les calculs sont évidemment plus importants.

Considérons maintenant cinq masses reliées entre elles. Sans justification mathématique, par simple analogie avec le cas précédent et la corde vibrante étudiée en cours, conjecturer l'allure des trois modes propres de vibration de ce système.

Les deux modes propres obtenus dans la partie précédente ressemblent aux deux premiers modes propres de la corde vibrante étudiée en cours. On peut imaginer que les trois modes propres de la corde à 5 masses ressembleront aussi aux trois premiers modes propres du problème classique :



C'est bien le cas. La recherche des solutions stationnaire aboutit à un système à trois équations analogue à celui obtenu dans la partie précédente. Et on obtient bien trois modes propres de vibrations rappelant les modes propres ci-dessus : un premier mode où les trois masses vibrent en phase (avec une pulsation $\sqrt{2-\sqrt{2}}$), un second mode où les deux masses extrêmes vibrent en opposition de phase (avec une pulsation $\sqrt{2}$) et la masse centrale reste immobile et enfin un troisième mode où la masse centrale vibre en opposition de phase avec les deux autres masses (avec une pulsation $\sqrt{2+\sqrt{2}}$).



Exercice 2 : équation de transport (8 pts)

Soit $c > 0$. On considère l'équation aux dérivées partielles définie par

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \forall t \geqslant 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = c\frac{\partial f}{\partial x},$$

On ajoute la condition initiale :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x,0) = f_0(x).$$

1. Passer à la transformée de Fourier <u>en x</u> dans l'équation de transport et en déduire que $\hat{f}$ est solution d'une équation différentielle de la variable t.

   On s'autorisera à écrire $\widehat{\dfrac{\partial f}{\partial t}} = \dfrac{\partial \hat{f}}{\partial t}$.

   La propriété de dérivation de la transformée de Fourier s'écrit : $\widehat{g'}(\omega) = \mathrm{i}\omega\hat{g}(\omega)$. Donc ici, $\widehat{\dfrac{\partial f}{\partial x}}(\omega,t) = \mathrm{i}\omega\hat{f}(\omega,t)$.
   En s'autorisant, comme dans le cours, à écrire que la transformée en x et la dérivation en t peuvent être intervertie, l'équation de transport devient

   $$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(\omega,t) = \mathrm{i}\omega c\hat{f}(\omega,t).$$

2. Résoudre cette équation différentielle et en déduire que $\hat{f}(\omega, t) = \hat{f}_0(\omega)e^{i\omega ct}$.

On a obtenu une équation d'ordre 1 en t, de la forme $y'(t) = \mathrm{i}\omega c y(t)$. Elle est linéaire à coefficient constant et ses solutions sont de la forme $y(t) = \lambda e^{\mathrm{i}\omega ct}$. Donc $\hat{f}(\omega, t) = \lambda(\omega)e^{\mathrm{i}\omega ct}$.

À $t = 0$, $f(x, 0) = f_0(x)$. Donc $\hat{f}(\omega, 0) = \hat{f}_0(\omega)$. Or d'après ce qui précède, $\hat{f}(\omega, t) = \lambda(\omega)e^0$. On en déduit $\lambda(\omega) = \hat{f}_0(\omega)$ et finalement

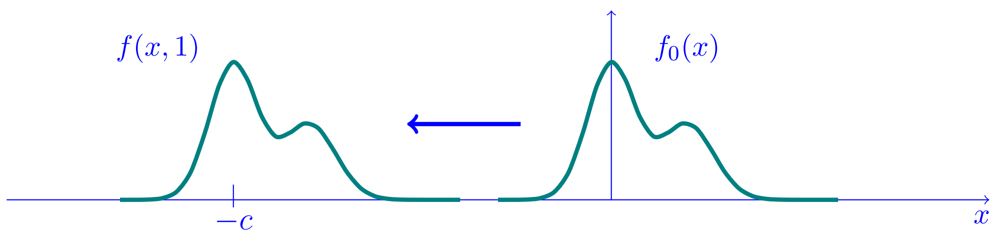
$$\hat{f}(\omega, t) = \hat{f}_0(\omega)e^{\mathrm{i}\omega ct}.$$

3. En déduire l'expression de la solution $f(x, t)$ du problème.
Représenter une fonction f_0 quelconque et décrire l'évolution de f au cours du temps.

On reconnaît dans l'expression ci-dessus un terme de déphasage. D'après la propriété de décalage-déphasage, on a $\widehat{f_0(x + ct)} = \hat{f}_0(\omega)e^{\mathrm{i}\omega ct}$. Donc $\hat{f}(\omega, t) = \widehat{f_0(x + ct)}$. Par unicité de la transformée de Fourier, on déduit

$$f(x, t) = f_0(x + ct).$$

On reconnaît un terme de propagation : la fonction f à l'instant t est obtenue en décalant la fonction initiale f_0 vers les x décroissants à la vitesse c.



4. Recommencer l'exercice avec l'équation de transport modifiée $\dfrac{\partial f}{\partial t} = c\dfrac{\partial f}{\partial x} - f$.
Comment se comporte la solution de ce nouveau problème ?

Reprenons le même raisonnement et passons à la transformée de Fourier en x dans cette nouvelle équation. On obtient

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(\omega, t) = \mathrm{i}\omega c\hat{f}(\omega, t) - \hat{f}(\omega, t).$$

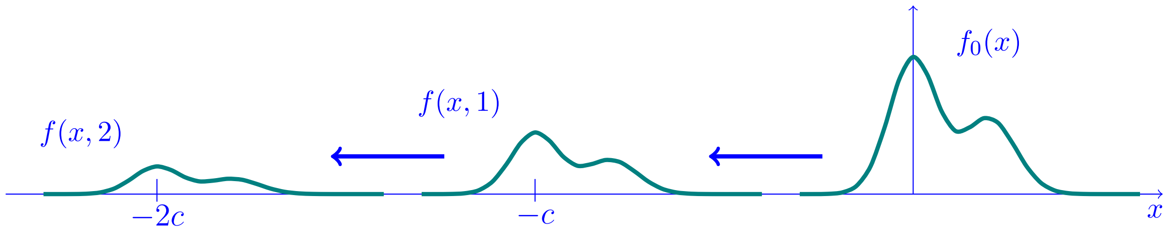
On obtient une équation différentielle en t de la forme $y'(t) = \mathrm{i}\omega y(t) - y(t) = (\mathrm{i}\omega - 1)y(t)$.
C'est encore une équation linéaire homogène dont les solutions sont de la forme $y(t) = \lambda e^{(\mathrm{i}\omega - 1)t}$. Donc $\hat{f}(\omega, t) = \lambda(\omega)e^{(\mathrm{i}\omega - 1)t}$.
Avec la condition initiale $f(x, 0) = f_0(x)$, on montre encore que $\lambda(\omega) = \hat{f}_0(\omega)$ et on déduit

$$\hat{f}(\omega, t) = \hat{f}_0(\omega)e^{\mathrm{i}\omega t}e^{-t}.$$

On reconnaît de nouveau un terme de déphasage et on conclut

$$f(x, t) = f_0(x + ct)e^{-t}.$$

La solution est de nouveau obtenue en décalant la fonction f_0 vers les x décroissants à la vitesse c mais il y a en plus un terme d'amortissement qui fait décroître l'amplitude de f exponentiellement.



$f(x,2)$
$f(x,1)$
$f_0(x)$
$-2c$
$-c$
x