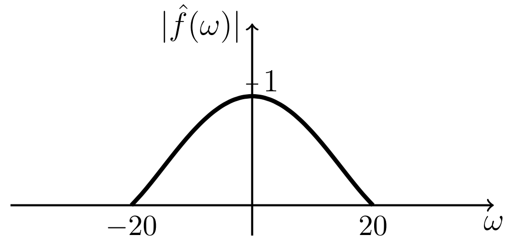
Contrôle 2

Le polycopié de cours est autorisé, la calculatrice est interdite.
Toutes les réponses doivent être justifiées et correctement rédigées.

Exercice 1 : attribution d'une bande de fréquence (7 pts)

Le but de cet exercice est de comprendre comment on peut allouer à un signal donné une certaine bande de fréquence avant de l'émettre.

On considère un signal sonore $f(t)$ dont les fréquences ω audibles sont situées entre 0 et 20 kH. On représente ci-contre son spectre, c'est-à-dire sa transformée de Fourier (en module) :

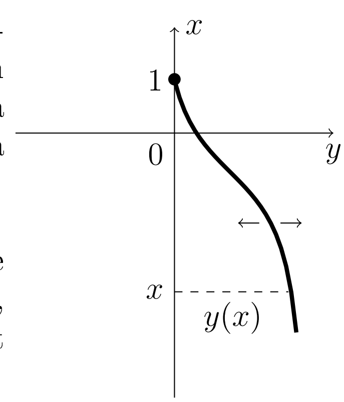


1. Notons g la fonction définie par $g(t) = f(\frac{t}{10})$. Exprimer la transformée $\hat{g}(\omega)$ en fonction de la transformée $\hat{f}$ puis représenter le spectre de g.
2. Soit φ une fonction intégrable, $a > 0$ et ψ la fonction définie par $\psi(t) = \mathrm{e}^{iat}\varphi(t)$. Démontrer que $\hat{\psi}(\omega) = \hat{\varphi}(\omega - a)$.
3. En déduire la transformée de Fourier de la fonction $\phi(t) = \cos(at)\varphi(t)$.
4. Un exemple : pour $\varphi(t) = \sin(t)$ et $a = 6$, représenter les graphes de $\varphi(t)$ et de $\phi(t)$.
5. Posons $h(t) = \cos(100t)f(\frac{t}{10})$. Donner la transformée de h et représenter son spectre.
6. Que peut-on dire des fréquences présentes dans la fonction h ? Est-il possible de retrouver la fonction f initiale, connaissant cette fonction h ?

Exercice 2 : Chaînette semi-libre (13 pts)

On considère une corde fixée au point $(0, 1)$. Elle est homogène, de masse non négligeable et sa longueur importe peu. On souhaite décrire ses oscillations autour de l'axe vertical. (La situation est analogue à celle du pendule simple sauf que la corde est non rigide.)

On note $y(x, t)$ la distance (algébrique) de la corde à l'axe vertical à la hauteur x et à l'instant t. En supposant, entre autres, que la corde reste proche de l'axe vertical, son mouvement est décrit par l'équation :



$$(E) : \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x},$$

et la condition au bord se traduit par : $\forall t, \quad y(1,t) = 0$.

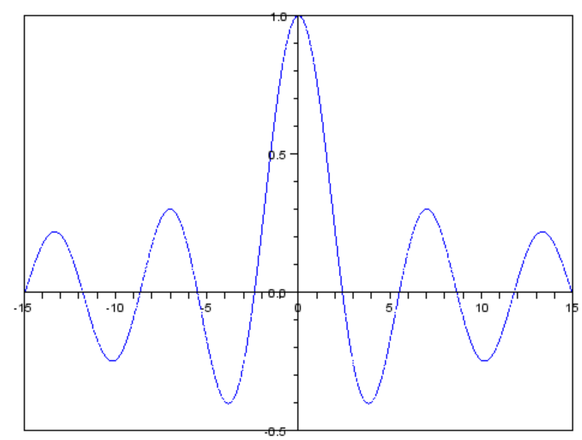
1. Comment établirait-on l'équation (E) ? Quelles sont en particulier les forces en présence ? *On attend une réponse courte, sans calcul, ni expression mathématique.*

2. Recherche des solutions stationnaires.
   On cherche les solutions particulières de la forme $y(x,t) = U(x)V(t)$. Elles correspondent aux modes propres de vibration de la corde.
   (a) Injecter y dans l'équation (E) et déterminer l'équation différentielle satisfaite par $U(x)$. On notera λ la constante intervenant dans le raisonnement. De quel type est l'équation obtenue ?

   On ne sait pas résoudre explicitement cette équation. On admet que ses solutions sont de la forme

   $$U(x) = AJ_0(2\sqrt{-\lambda x}\,),$$

   où A est une constante réelle et J_0 est la fonction de Bessel dont le graphe est donné ci-contre.



   (b) En utilisant la condition au bord et ce graphe, déterminer grossièrement les premières valeurs numériques possibles de λ et représenter les trois premiers modes de vibration de la corde.
   (c) Déterminer les solutions V correspondantes. Quelles sont les fréquences de vibration des trois premiers modes ?
   (d) Donner l'expression des solutions générales du problème.

3. On considère maintenant la présence d'un vent horizontal constant. L'équation du mouvement devient alors

   $$(E') : \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x} + d, \qquad \text{avec } d \in \mathbf{R}.$$

   (a) Déterminer la position à l'équilibre de la corde, c'est-à-dire la solution y_{eq} indépendante de t, et la représenter.
   Indication : on remarquera que $y'_{eq}(x)$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Puis on utilisera la condition au bord et le fait que la solution doit être définie en $x = 0$.
   (b) Montrer que si y est solution de (E'), alors $\tilde{y} = y - y_{eq}$ est solution de (E). En déduire l'expression de la solution générale de ce nouveau problème.