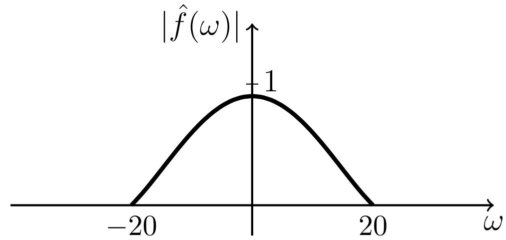
Corrigé du contrôle 2

Exercice 1 : attribution d'une bande de fréquence (7 pts)

Le but de cet exercice est de comprendre comment on peut allouer à un signal donné une certaine bande de fréquence avant de l'émettre.

On considère un signal sonore $f(t)$ dont les fréquences ω audibles sont situées entre 0 et 20 kH. On représente ci-contre son spectre, c'est-à-dire sa transformée de Fourier (en module) :



1. Notons g la fonction définie par $g(t) = f(\frac{t}{10})$. Exprimer la transformée $\hat{g}(\omega)$ en fonction de la transformée $\hat{f}$ puis représenter le spectre de g.

   La fonction g est une dilatation de la fonction f. Sa transformée de Fourier est donnée par
   $$\hat{g}(\omega) = 10\hat{f}(10\omega).$$
   Le spectre de g est obtenu en contractant le spectre de f (entre -2 et 2) et en l'amplifiant (en ordonnée) d'un facteur 10.

2. Soit φ une fonction intégrable, $a > 0$ et ψ la fonction définie par $\psi(t) = \mathrm{e}^{iat}\varphi(t)$. Démontrer que $\hat{\psi}(\omega) = \hat{\varphi}(\omega - a)$.

   Calculons la transformée de ψ :
   $$\hat{\psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{iat}\varphi(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{e}^{-i(\omega-a)t}\mathrm{d}t = \hat{\varphi}(\omega - a).$$

3. En déduire la transformée de Fourier de la fonction $\phi(t) = \cos(at)\varphi(t)$.

   Comme $\phi(t) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{iat} - \mathrm{e}^{-iat})\varphi(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{iat}\varphi(t) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-iat}\varphi(t)$, on peut appliquer le résultat précédent et obtenir :
   $$\hat{\phi}(\omega) = \tfrac{1}{2}\hat{\varphi}(\omega - a) + \tfrac{1}{2}\hat{\varphi}(\omega + a).$$

4. Un exemple : pour $\varphi(t) = \sin(t)$ et $a = 6$, représenter les graphes de $\varphi(t)$ et de $\phi(t)$.
5. Posons $h(t) = \cos(100t)f(\frac{t}{10})$. Donner la transformée de h et représenter son spectre.

Compilons nos résultats :

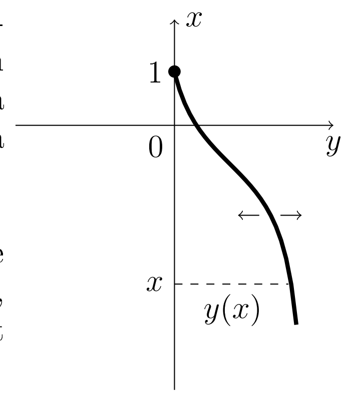
$$\hat{h}(\omega) = \tfrac{1}{2}\hat{g}(\omega - 100) + \tfrac{1}{2}\hat{g}(\omega + 100) = 5\hat{f}(10\omega - 1000) + 5\hat{f}(10\omega + 1000).$$

Le spectre de h est obtenu en décalant le spectre de g de 1000 vers la droite et la gauche et en le réduisant de moitié.

6. Que peut-on dire des fréquences présentes dans la fonction h ? Est-il possible de retrouver la fonction f initiale, connaissant cette fonction h ?

   Ainsi, le spectre de h est situé entre les fréquences 998 et 1002. Autrement dit, en appliquant nos transformations à f, nous avons réussi à attribuer au signal cette bande de fréquence sans en modifier la forme. Il est facile de retrouver à partir de h le signal f. Il suffit de faire subir à h les transformations inverses : on recentre son spectre, puis on le dilate.

Exercice 2 : Chaînette semi-libre (13 pts)



On considère une corde fixée au point $(0, 1)$. Elle est homogène, de masse non négligeable et sa longueur importe peu. On souhaite décrire ses oscillations autour de l'axe vertical. (La situation est analogue à celle du pendule simple sauf que la corde est non rigide.)

On note $y(x,t)$ la distance (algébrique) de la corde à l'axe vertical à la hauteur x et à l'instant t. En supposant, entre autres, que la corde reste proche de l'axe vertical, son mouvement est décrit par l'équation :

$$(E) : \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x},$$

et la condition au bord se traduit par : $\forall t, \quad y(1,t) = 0$.

1. Comment établirait-on l'équation (E) ? Quelles sont en particulier les forces en présence ? *On attend une réponse courte, sans calcul, ni expression mathématique.*

2. Recherche des solutions stationnaires.
   On cherche les solutions particulières de la forme $y(x,t) = U(x)V(t)$. Elles correspondent aux modes propres de vibration de la corde.

   (a) Injecter y dans l'équation (E) et déterminer l'équation différentielle satisfaite par $U(x)$. On notera λ la constante intervenant dans le raisonnement. De quel type est l'équation obtenue ?

   On injecte $U(x)V(t)$ dans l'équation différentielle :

$$U(x)V''(t) = xU''(x)V(t) + U'(x)V(t).$$

Donc en séparant les variables

$$\frac{V''(t)}{V(t)} = \frac{xU''(x) + U'(x)}{U(x)}.$$

Ces deux fonctions dépendant de variables différentes, elles ne peuvent être égales que si elles sont égales à une même constante λ. On obtient ainsi

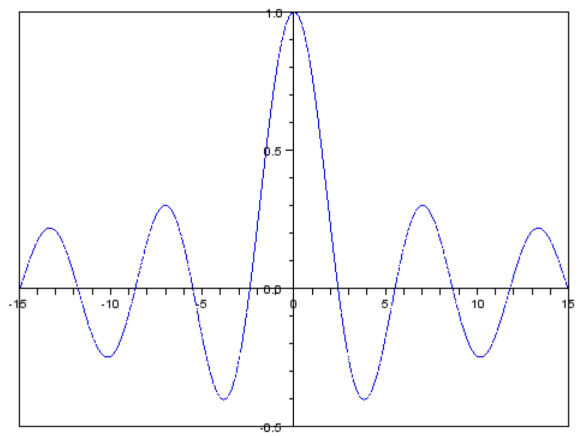
$$xU''(x) + U'(x) - \lambda U(x) = 0,$$

où λ est une constante réelle. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants (ce qui peut expliquer qu'on ne sache pas la résoudre).

On ne sait pas résoudre explicitement cette équation. On admet que ses solutions sont de la forme

$$U(x) = AJ_0(2\sqrt{-\lambda x}\,),$$

où A est une constante réelle et J_0 est la fonction de Bessel dont le graphe est donné ci-contre.



(b) En utilisant la condition au bord et ce graphe, déterminer grossièrement les premières valeurs numériques possibles de λ et représenter les trois premiers modes de vibration de la corde.

On sait que pour tout t, $y(1,t) = 0$. Cela implique $U(1) = 0$. Donc $U(1) = AJ_0(2\sqrt{-\lambda}) = 0$. Comme on cherche une solution non nulle, on veut $A \neq 0$ et cela implique donc que $2\sqrt{-\lambda}$ est un point d'annulation de la fonction de Bessel J_0. Ainsi $2\sqrt{-\lambda} = \omega_k$ et $\lambda = -\frac{\omega_k^2}{4}$, où ω_k désigne un zéro de J_0. Ainsi, U est de la forme

$$U(x) = AJ_0(\omega_k\sqrt{x}).$$

Graphiquement, les premiers zéros de J_0 valent $\omega_1 \approx 2,4$, $\omega_2 \approx 5,5$ et $\omega_3 \approx 8,8$. L'allure de U ressemble un peu au graphe de J_0 entre 0 et ω_k.

(c) Déterminer les solutions V correspondantes. Quelles sont les fréquences de vibration des trois premiers modes ?

D'autre part, d'après la question 2-a, V est solution de $V''(t) - \lambda V(t) = 0$. Comme $\lambda < 0$, V est de la forme

$$V(t) = C\cos(t\sqrt{-\lambda}) + D\sin(t\sqrt{-\lambda}) = C\cos(t\omega_k/2) + D\sin(t\omega_k/2).$$

Les fréquences de vibrations des trois premiers modes sont donc $\omega_1/2 \approx 1,2$, $\omega_2/2 \approx 2,2$ et $\omega_3/2 \approx 4,4$.

(d) Donner l'expression des solutions générales du problème.

Les solutions stationnaires associées à notre problème sont donc les fonctions de la forme

$$y(x,t) = J_0(\omega_k\sqrt{x})(C\cos(t\omega_k/2) + D\sin(t\omega_k/2)).$$

3. On considère maintenant la présence d'un vent horizontal constant. L'équation du mouvement devient alors

$$(E') : \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x} + d, \qquad \text{avec } d \in \mathbf{R}.$$

(a) Déterminer la position à l'équilibre de la corde, c'est-à-dire la solution y_{eq} indépendante de t, et la représenter.

À l'équilibre, $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$ et donc $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$. On peut donc écrire $y(x,t) = y(x)$ et cette solution vérifie

$$0 = xy''(x) + y'(x) + d.$$

Ainsi y' est solution de l'équation différentielle $xz'(x) + z(x) = -d$. Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme

$$\frac{\alpha}{x} - d,$$

où α est un réel.
Donc y' est l'une de ces fonctions, et en intégrant on obtient

$$y(x) = \alpha\ln(x) - dx + c,$$

avec $c \in \mathbf{R}$.
Or on cherche une solution définie en $x = 0$, donc $\alpha = 0$. D'autre part, on doit avoir $y(1) = 0$. Cela implique $c = d$. Ainsi, la position à l'équilibre de la corde soumise au vent est donnée par la fonction

$$y(x) = d - dx.$$

Il s'agit d'une droite.

Indication : on remarquera que $y'_{eq}(x)$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Puis on utilisera la condition au bord et le fait que la solution doit être définie en $x = 0$.

(b) Montrer que si y est solution de (E'), alors $\tilde{y} = y - y_{eq}$ est solution de (E). En déduire l'expression de la solution générale de ce nouveau problème.

Les fonctions y et y_{eq} sont toutes deux solutions de l'équation (E'). Par linéarité, on en déduit

$$\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y_{eq}}{\partial t^2} = \left(x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x} + d\right) - \left(x\frac{\partial^2 y_{eq}}{\partial x^2} + \frac{\partial y_{eq}}{\partial x} + d\right) = x\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}.$$

Ainsi $\tilde{y}$ est bien solution de l'équation (E).