Contrôle 1

Exercice 1 **Série entière**

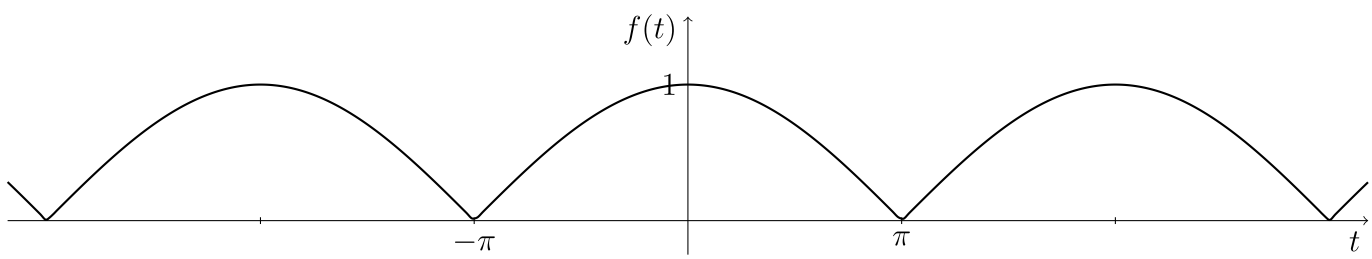
On considère la fonction y suivante définie sur $]-1,1[$ sous forme d'une série entière :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n.$$

1. Calculer $xy'(x) - y'(x) + 2y(x)$.
2. En déduire que y est solution d'une équation différentielle et déterminer ainsi son expression.

Exercice 2 **Séries de Fourier**

On considère la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par : $f(t) = \cos(\frac{t}{2})$.



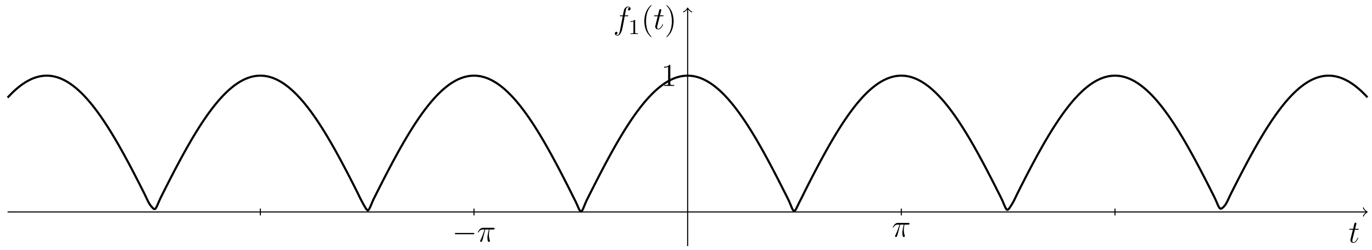
1. Calculer les coefficients de Fourier réels de f.
2. Écrire sa série de Fourier et représenter l'allure de son spectre.
3. La convergence de la série est-elle rapide ? Faire le lien avec une propriété de f.
4. On donne au verso les graphes de trois fonctions 2π-périodiques ainsi que de trois spectres. Associer à chacune son spectre en justifiant avec plusieurs arguments.

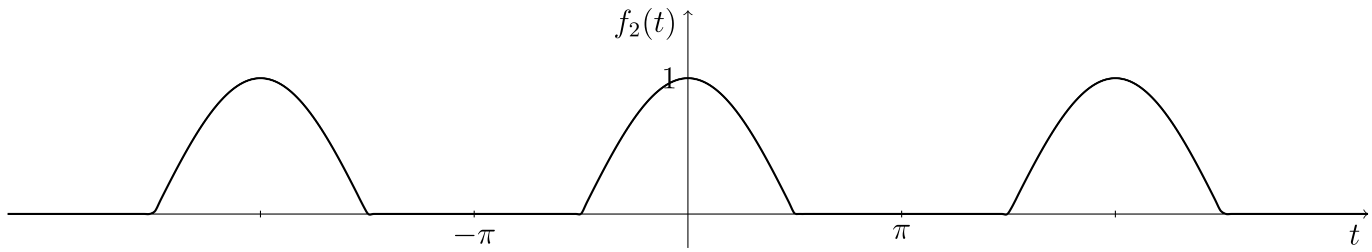
Rappels : les coefficients de Fourier d'une fonction f 2π-périodique sont donnés par

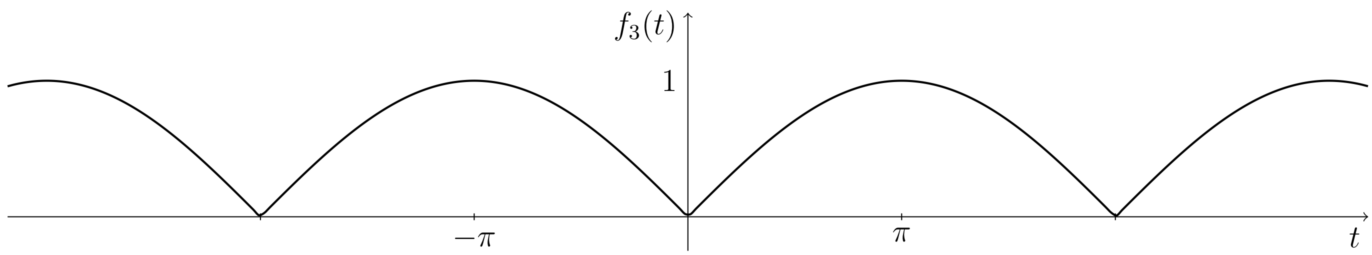
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t.$$

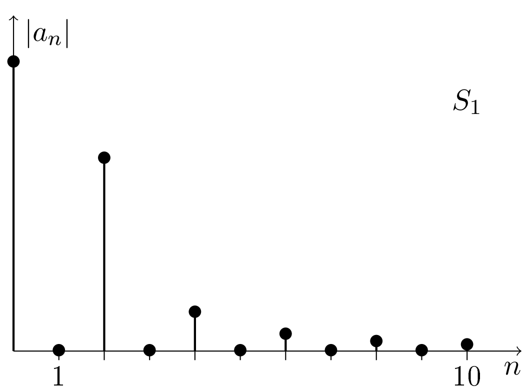
La série de Fourier de f est alors donnée par $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)$.

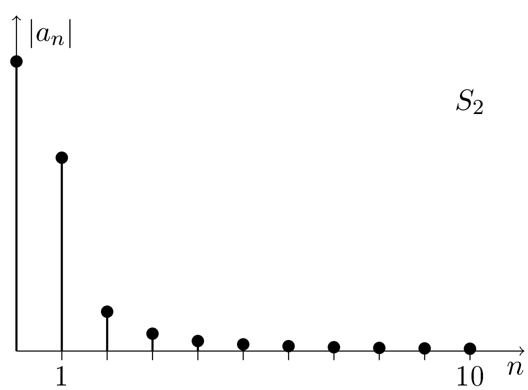
Trigonométrie : $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b)$, $\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\sin(a+b) - \frac{1}{2}\sin(a-b)$.

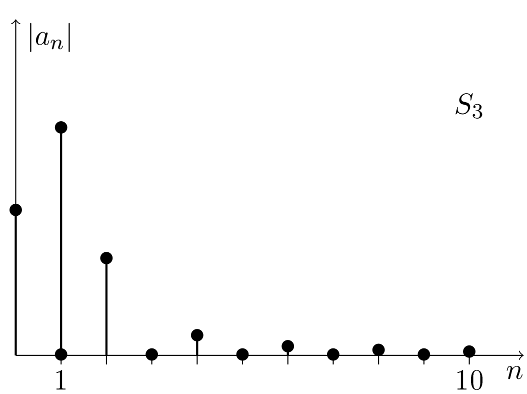

$f_1(t)$
1
$-\pi$
π
t


$f_2(t)$
1
$-\pi$
π
t


$f_3(t)$
1
$-\pi$
π
t


$|a_n|$
S_1
1
10
n


$|a_n|$
S_2
1
10
n


$|a_n|$
S_3
1
10
n