Contrôle 1

Exercice 1 **Calcul numérique d'un logarithme**

Le but de cet exercice est d'écrire $g(x) = \ln(1-x)$ sous forme d'une série entière, afin d'en calculer des valeurs numériques approchées. Nous commencerons par déterminer la série entière de sa dérivée.

1. Déterminer la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ satisfaisant : $(x-1)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1$.
2. En déduire l'expression de g sous la forme $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. Cette fonction satisfait en effet :
$$g'(x) = \frac{1}{x-1} \quad \text{et} \quad g(0) = 0.$$
3. Déterminer ainsi les quatre premières décimales de $\ln(0{,}9)$.

Exercice 2 **Équation différentielle**

On s'intéresse à un système dont l'évolution en régime libre est modélisée par l'équation
$$(E_0) \ : \quad y''(t) + y(t) = 0.$$
On souhaite étudier son comportement en régime forcé périodique.

1. Résoudre l'équation homogène (E_0).
2. Soit n un entier supérieur à 2. Résoudre l'équation $y''(t) + y(t) = \sin(nt)$.
On cherchera une solution particulière de la forme $y_n(t) = \alpha_n \sin(nt)$.
3. Comment se comporte α_n en fonction de n ? Interpréter : quelles pulsations n sont les mieux transmises au système en régime forcé.
4. Résoudre l'équation $y''(t) + y(t) = \sin(t)$.
On cherchera une solution particulière de la forme $y_1(t) = \beta t \cos(t)$.
5. Interpréter la solution obtenue.

On considère désormais la fonction f 2π-périodique impaire définie sur $]-\pi, \pi[$ par $f(t) = t$.

6. Représenter le graphe de f.
7. Calculer les coefficients de Fourier réels de f et écrire la série de Fourier de f.
8. À l'aide du principe de superposition et des résultats des questions précédentes, donner l'expression de la solution de l'équation $y''(t) + y(t) = f(t)$.

Rappels : les coefficients de Fourier d'une fonction f 2π-périodique sont donnés par
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x.$$

La série de Fourier de f est alors donnée par $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$.