Contrôle 1

Exercice 1 **Calcul numérique d'un logarithme**

Le but de cet exercice est d'écrire $g(x) = \ln(1-x)$ sous forme d'une série entière, afin d'en calculer des valeurs numériques approchées. Nous commencerons par déterminer la série entière de sa dérivée.

1. Déterminer la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ satisfaisant : $\quad (x-1)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1$.

   Développons :
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1,$$
   ou sous forme explicite :
   $$(a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \cdots) - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots) = 1.$$
   Réindexons la première somme puis regroupons les deux sommes :
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1,$$
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n-1} - a_n) x^n \quad - \quad a_0 = 1.$$
   Par unicité de l'écriture en série entière, on peut identifier les termes de même degré :
   $$-a_0 = 1, \quad a_0 - a_1 = 0, \quad a_1 - a_2 = 0, \quad a_2 - a_3 = 0 \cdots$$
   ou, par récurrence :
   $$a_0 = -1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbf{N},\; a_n - a_{n-1} = 0.$$
   On en déduit facilement :
   $$\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n = -1.$$
   Donc la série entière recherchée est $\sum_{n=0}^{+\infty} -x^n$.

   Remarque : cette série n'est convergente que pour $x \in]-1, 1[$, elle est trivialement divergente pour les autres valeurs de x. Ce n'est pas surprenant qu'il y ait un problème en $x = 1$. Nous sommes en effet en train de chercher la série entière de $\frac{1}{x-1}$, qui n'est pas définie en $x = 1$.

2. En déduire l'expression de g sous la forme $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. Cette fonction satisfait en effet :
   $$g'(x) = \frac{1}{x-1} \qquad \text{et} \qquad g(0) = 0.$$

   En s'autorisant à dériver sous le signe somme, $g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n b_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) b_{n+1} x^n$. D'autre part $\frac{1}{x-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} -x^n$ d'après la question précédente. Ainsi
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) b_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} -x^n.$$

En identifiant les coefficients de ces séries entières :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad (n+1)b_{n+1} = -1.$$

On en déduit que pour tout $n \geqslant 1$, $b_n = -\frac{1}{n}$.
D'autre part, comme $g(0) = 0$, on déduit $b_0 = 0$. Finalement, la série entière de g est donnée par

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{n} x^n.$$

3. Déterminer ainsi les quatre premières décimales de $\ln(0{,}9)$.

On remarque que $\ln(0{,}9) = \ln(1 - 0{,}1) = g(0{,}1)$. Donc $\ln(0{,}9) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{(0{,}1)^n}{n}$. on peut l'approcher en calculant les premiers termes de la série :

$$\begin{aligned}\ln(0{,}9) &\approx -0{,}1 - \frac{(0{,}1)^2}{2} - \frac{(0{,}1)^3}{3} - \frac{(0{,}1)^4}{4} \\ &\approx -0{,}1 - 0{,}005 - 0{,}000333 - 0{,}000025\end{aligned}$$

On remarque que le n-ème terme de la somme est inférieur à 10^{-n} et n'a donc pas d'influence sur les $n-1$ premières décimales du nombre. Nous pouvons certifier que dans l'approximation ci-dessus, les 4 premières décimales sont bien celles de $\ln(0{,}9)$. Donc

$$\ln(0{,}9) \approx -0{,}1053.$$

(Avec un logiciel, on obtient $\ln(0{,}9) \approx 0,1053605$. On constate que pour garantir la 5ème décimale, il faut calculer le 5ème terme de la somme.)

Exercice 2 — Équation différentielle

On s'intéresse à un système dont l'évolution en régime libre est modélisée par l'équation

$$(E_0) \quad : \quad y''(t) + y(t) = 0.$$

On souhaite étudier son comportement en régime forcé périodique.

1. Résoudre l'équation homogène (E_0).

Son polynôme caractéristique est $X^2 + 1$ dont les racines sont i et $-$i. Les solutions de (E_0) sont de la forme $y(x) = A\cos(t) + B\sin(t)$.

2. Soit n un entier supérieur à 2. Résoudre l'équation $y''(t) + y(t) = \sin(nt)$.
On cherchera une solution particulière de la forme $y_n(t) = \alpha_n \sin(nt)$.

L'équation homogène associée a été résolue. Cherchons une solution particulière sous la forme demandée. On l'injecte dans l'équation et on obtient :

$$-n^2\alpha_n \sin(nt) + \alpha_n \sin(nt) = \sin(nt).$$

L'équation sera satisfaite si $-n^2\alpha_n + \alpha_n = 1$, donc si $\alpha_n = \frac{1}{1-n^2}$ $\quad (1 - n^2 \neq 0$ car $n \geqslant 2)$.
Les solutions de l'équation sont de la forme $y(x) = A\cos(t) + B\sin(t) + \frac{1}{1-n^2}\sin(nt)$.

3. Comment se comporte α_n en fonction de n ? Interpréter : quelles pulsations n sont les mieux transmises au système en régime forcé.

La suite $\alpha_n = \frac{1}{1-n^2}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Les valeurs élevées de n correspondent à un forçage $\sin(nt)$ de fréquence élevée. Ainsi, plus la fréquence imposée est haute, plus la réponse du système l'atténue. Au contraire, les forçages de fréquence faible ($n = 2$ étant la plus basse fréquence considérée) sont mieux transmises au système. Le système se comporte comme un filtre passe-bas.

4. Résoudre l'équation $y''(t) + y(t) = \sin(t)$.
On cherchera une solution particulière de la forme $y_1(t) = \beta t \cos(t)$.

   On injecte la fonction proposée dans l'équation et on obtient

$$(-\beta t \cos(t) - 2\beta \sin(t)) + \beta t \cos(t) = \sin(t).$$

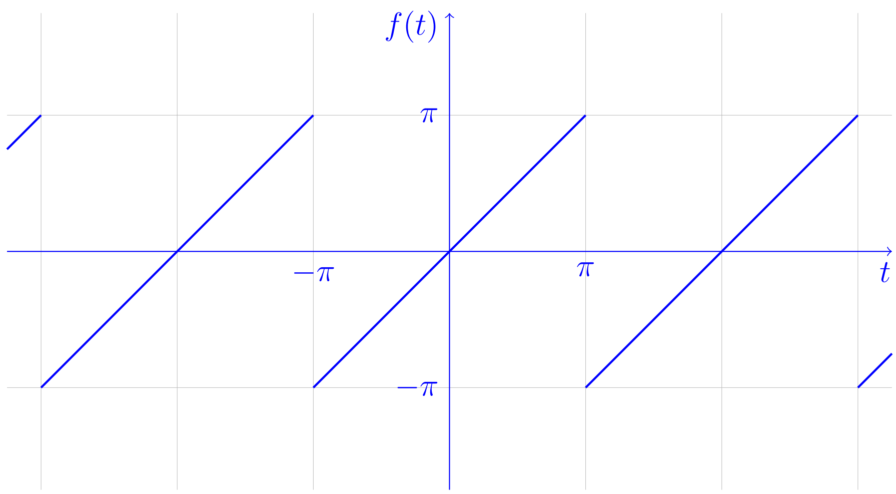
   Après simplification et identification, on trouve $\beta = -\frac{1}{2}$, donc $y_1(t) = -\frac{t}{2}\cos(t)$. Les solutions sont de la forme $y(x) = A\cos(t) + B\sin(t) - \frac{t}{2}\cos(t)$.

5. Interpréter la solution obtenue.

   La solution particulière obtenue n'est pas périodique. Elle oscille avec une amplitude de plus en plus grande au cours du temps. C'est le phénomène de résonance : la fréquence imposée $(n = 1)$ est une fréquence propre du système ; elle est amplifiée par le système.

   On considère désormais la fonction f 2π-périodique impaire définie sur $]-\pi, \pi[$ par $f(t) = t$.

6. Représenter le graphe de f.



7. Calculer les coefficients de Fourier réels de f et écrire la série de Fourier de f.

   La valeur moyenne de f est clairement nulle, donc son coefficient a_0 est nul. Mieux, la fonction f est impaire et tous ses coefficients a_n sont nuls. Calculons ses coefficients b_n à l'aide d'une intégration par partie :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\left[-t\frac{\cos(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{\cos(nt)}{n}\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{\pi}(-\frac{\pi\cos(n\pi)}{n} + \frac{-\pi\cos(-n\pi)}{n} - 0) \\ &= -\frac{2(-1)^n}{n} \end{aligned}$$

   La série de Fourier de f est :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{2(-1)^n}{n}\sin(nt),$$

   l'égalité étant vraie partout où f est continue.

8. À l'aide du principe de superposition et des résultats des questions précédentes, donner l'expression de la solution de l'équation $y''(t) + y(t) = f(t)$.

L'équation à résoudre est linéaire. On a déjà résolu toutes les équations de la forme $y''(t) + y(t) = \sin(nt)$ et f est, par sa série de Fourier, une combinaison linéaire infinie des fonctions $\sin(nt)$. Le principe de superposition nous permet de dire qu'une solution particulière de l'équation est obtenue en combinant les solutions particulières des équations résolues précédemment. En distinguant le cas $n = 1$ des cas $n \geqslant 2$, on écrit $f(t) = 2\sin(t) + \sum_{n=2}^{+\infty} -\frac{2(-1)^n}{n} \sin(nt)$ et on obtient la solution particulière :

$$y_p(t) = -\sin(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{2(-1)^n}{n(1-n^2)} \sin(nt).$$

En ajoutant les solutions $A\cos(t) + B\sin(t)$ de l'équation homogène, on obtient toutes les solutions de notre équation.

Rappels : les coefficients de Fourier d'une fonction f 2π-périodique sont donnés par

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x.$$

La série de Fourier de f est alors donnée par $\quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx).$