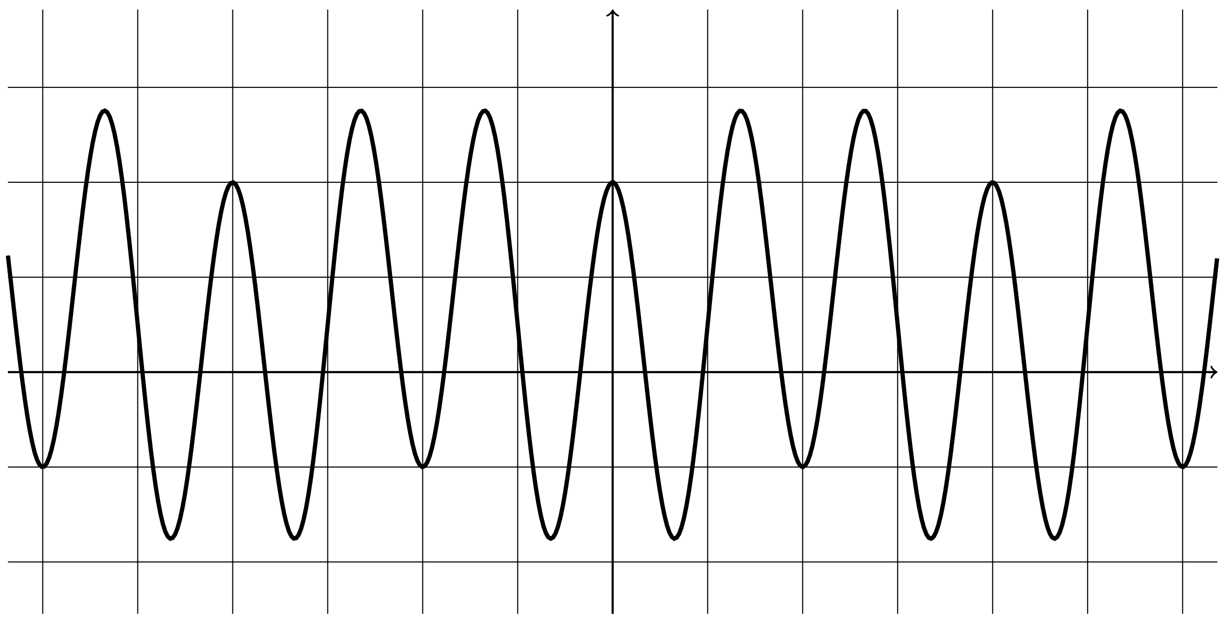
Contrôle 1

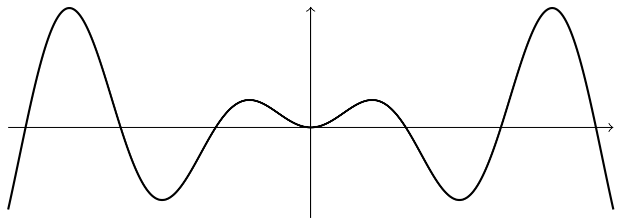
Exercice 1 **Série de Fourier**

On considère la fonction g dont le graphe est donné ci-dessous. Donner sa période puis estimer ses coefficients de Fourier et écrire enfin sa série de Fourier.



Exercice 2 **Développements en série d'une fonction.**

Le but de cet exercice est de déterminer le développement en série entière puis en série de Fourier de la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x\sin(x)$.



1. **Série entière**

   Pour déterminer le développement de f, nous allons commencer par déterminer celui du sinus.

   (a) On considère l'équation différentielle (E) : $\quad y''(x)+y(x) = 0$, avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.
   Déterminer la solution de ce problème.

   (b) Déterminer de nouveau les solutions de l'équation sous la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On exprimera les coefficients a_n en fonction de a_0 et a_1.

   (c) Que valent a_0 et a_1 d'après les conditions initiales ? En déduire le développement en série entière du sinus.

   (d) En déduire le développement en série entière de la fonction f.

2. **Série de Fourier**

   On considère désormais notre fonction f sur $[-\pi, \pi]$ et on la prolonge sur $\mathbf{R}$ en une fonction 2π-périodique.

   (a) Représenter l'allure de son graphe.

   (b) Soit $m \in \mathbf{N}^*$. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(mx)\mathrm{d}x$.

   (c) En déduire l'expression des coefficients de Fourier a_n de f puis écrire la série de Fourier de f.
   Indication : $\sin(x)\cos(nx) = \frac{1}{2}\sin((n+1)x) - \frac{1}{2}\sin((n-1)x)$.

   (d) Représenter l'allure des graphes des fonctions $x \mapsto a_0 + a_1\cos(x)$ et $x \mapsto a_0 + a_1\cos(x) + a_2\cos(2x)$.

3. **Régime forcé**

   On s'intéresse maintenant à l'équation différentielle $y''(x) + y(x) = \cos(kx)$ avec $k \in \mathbf{N}^*$, la fonction $\cos(kx)$ représentant par exemple une excitation extérieure de notre système initial.

   (a) On cherche une solution périodique que l'on peut décomposer sous la forme $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nx)$.
   Injecter cette série dans l'équation et déterminer les coefficients a_n lorsque $k \neq 1$.

   (b) Justifier qu'une telle solution ne peut pas exister lorsque $k = 1$. Trouver alors une solution du type λf.

   (c) Quel phénomène physique reconnaît-on dans ce cas ?

Rappels : les coefficients de Fourier d'une fonction f 2π-périodique sont donnés par

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x, \qquad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x.$$

La série de Fourier de f est alors donnée par $\quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx).$