# Contrôle 1

## Exercice 1 Primitive de la fonction de Gauss (6 points)

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Il est impossible d'exprimer une primitive de $f$ à l'aide des fonctions usuelles. Nous allons le faire à l'aide des séries entières. Nous ne justifierons pas que les séries obtenues sont bien convergentes sur $\mathbf{R}$ et nous contenterons d'une résolution formelle.

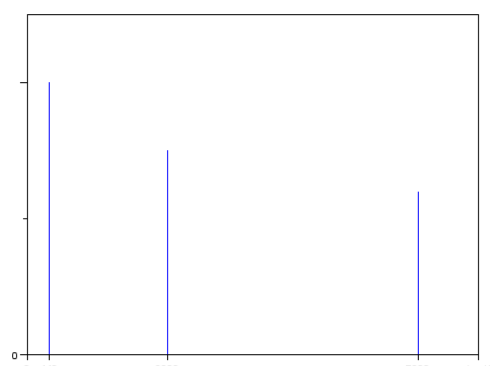
1. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 satisfaite par $f$.
2. En déduire que $f$ se décompose en série entière sous la forme :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}.$$

3. Soit $F$ la primitive de $f$ satisfaisant $F(0) = 0$. Déterminer l'expression de $F$ sous forme d'une série entière.

## Exercice 2 Spectre du diapason (6 points)

On fait vibrer un diapason en le frappant. L'analyse mathématique de cette vibration permet de déterminer le spectre du son émis par le diapason donné ci-dessous. (La fréquence fondamentale est bien celle du La à 440 Hz.)



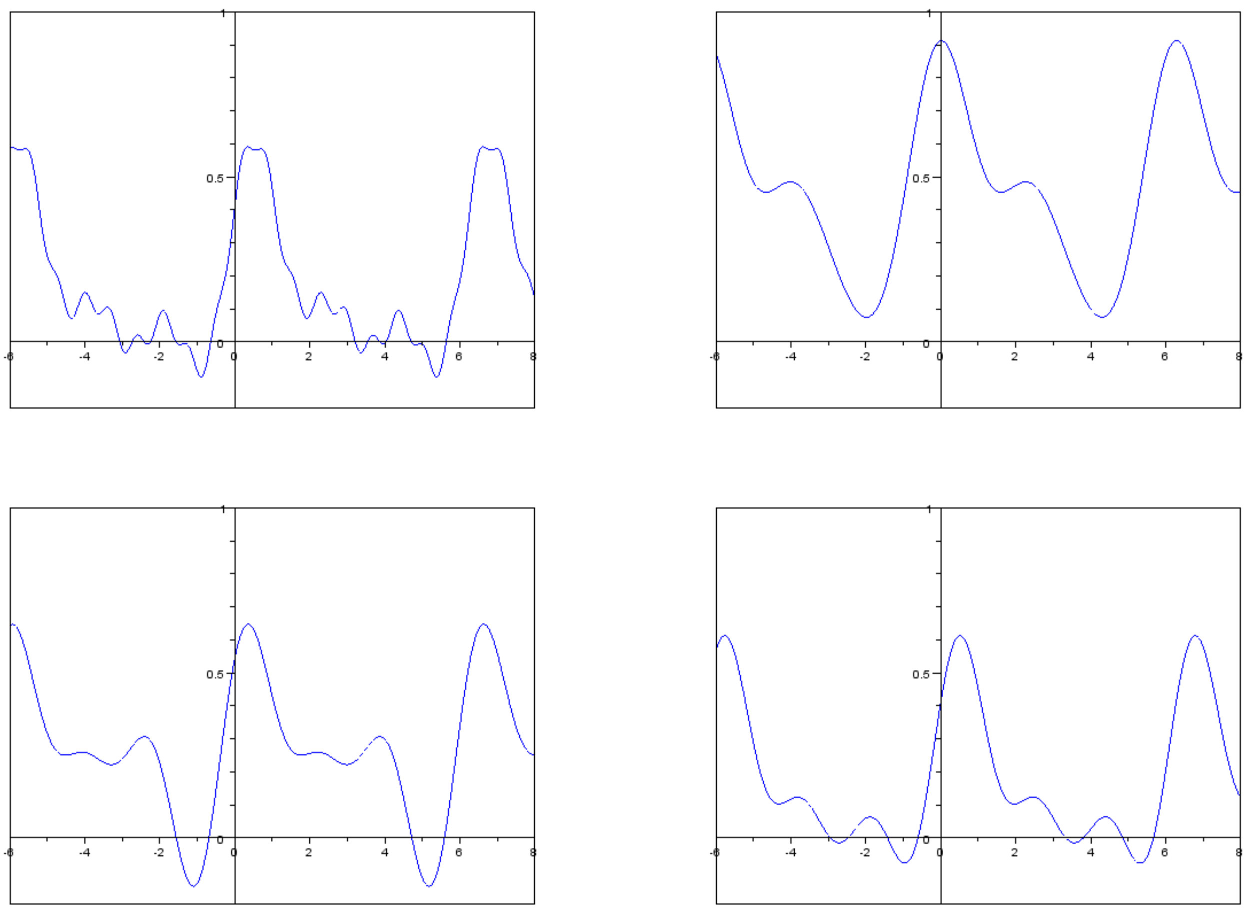

1. Décrire ce spectre. Qu'a-t-il de particulier par rapport aux spectres de Fourier qu'on rencontre habituellement ?
2. Peut-on dire que le diapason a un son pur ?
3. Si on tient compte des frottements de l'air, la vibration du diapason sera atténuée au cours du temps. Les lois physiques permettent de montrer que chaque composante de fréquence $\omega$ de la vibration est au bout d'un temps $t$ (en secondes) multipliée par $\mathrm{e}^{-\frac{\omega t}{1000}}$.
   Représenter l'allure du spectre du diapason au bout d'une seconde.
   *Quelques valeurs numériques :* $\mathrm{e}^{-0.5} \approx 0,6 \qquad \mathrm{e}^{-3} \approx 0,05$.
4. Peut-on dire que le diapason a un son pur ?

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ **Série de Fourier (8 points)**

On considère la fonction $f$ $2\pi$-périodique définie sur $]0, 2\pi[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

1. Représenter le graphe de $f$.
2. Calculer les coefficients de Fourier complexes $c_n$ de $f$ et écrire la série de Fourier de $f$.
3. La série converge-t-elle en tout point vers $f$ ? La convergence est-elle rapide ?
4. Retrouver parmi les graphes ci-dessous le graphe de la somme partielle $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=-3}^{3} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$.

   Justifier votre réponse grâce à vos calculs et/ou des considérations fréquentielles.



*Rappel : les coefficients de Fourier complexes d'une fonction $f$ $T$-périodique sont donnés par*

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\frac{2\pi}{T}x} \mathrm{d}x.$$

*La série de Fourier de $f$ est alors donnée par*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{2\pi}{T}x}.$$