Corrigé du contrôle 1

Exercice 1 **Primitive de la fonction de Gauss (6 points)**

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Il est impossible d'exprimer une primitive de f à l'aide des fonctions usuelles. Nous allons le faire à l'aide des séries entières. Nous ne justifierons pas que les séries obtenues sont bien convergentes sur $\mathbf{R}$ et nous contenterons d'une résolution formelle.

1. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 satisfaite par f.

   Comme $f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} = -2xf(x)$, on déduit que f est solution de l'équation $y'(x) + 2xy(x) = 0$.

2. En déduire que f se décompose en série entière sous la forme :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}.$$

   On injecte une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ dans l'équation différentielle :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0.$$

   Après changement d'indice :

$$\sum_{n=-1}^{+\infty} (n+2) a_{n+2} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} 2 a_n x^{n+1} = 0.$$

   On regroupe les séries et on déduit que chaque coefficient est nul. Ainsi :

$$a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0,\ (n+2)a_{n+2} + 2a_n = 0.$$

   Donc $a_2 = -a_0$, $a_3 = -\frac{2}{3}a_1 = 0$, $a_4 = -\frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2}a_0$ et par récurrence, on montre que pour tout n impair $a_n = 0$ et pour tout n pair, $a_n = \frac{(-1)^{n/2}}{(n/2)!}a_0$, ou autrement dit, pour tout entier k, $a_{2k} = \frac{(-1)^k}{k!}a_0$. On en déduit que la série recherchée est de la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k a_0}{k!} x^{2k}$. De plus, notre fonction f satisfait $f(0) = 1$. On en déduit que $a_0 = 1$ et donc

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k}.$$

3. Soit F la primitive de f satisfaisant $F(0) = 0$. Déterminer l'expression de F sous forme d'une série entière.

Cherchons la primitive de f sous forme de série entière. En supposant qu'on puisse intégrer la série de f terme à terme, on obtient

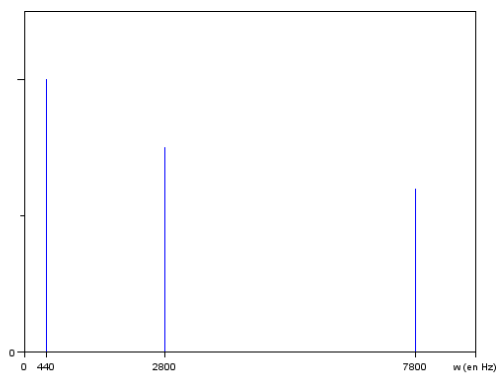
$$\int f = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{2n}}{2n+1} + \text{cste}.$$

On cherche la primitive qui s'annule en 0, donc la constante doit être nulle et on déduit

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n}.$$

Exercice 2 **Spectre du diapason** **(6 points)**

On fait vibrer un diapason en le frappant. L'analyse mathématique de cette vibration permet de déterminer le spectre du son émis par le diapason donné ci-dessous. (La fréquence fondamentale est bien celle du La à 440 Hz.)



1. Décrire ce spectre. Qu'a-t-il de particulier par rapport aux spectres de Fourier qu'on rencontre habituellement ?

   Dans les spectres de Fourier que l'on a étudiés, les fréquences présentes sont les multiples de la fréquence fondamentale. Ici, les trois fréquences présentes ne sont pas des multiples entiers de la première fréquence. On remarque également que les deux fréquences hautes sont plus éloignées de la fréquences fondamentales que les harmoniques que l'on observe dans les spectres de Fourier habituels.

2. Peut-on dire que le diapason a un son pur ?

   Le spectre étant composé de plusieurs fréquences, on ne peut pas dire que le diapason a un son pur.

3. Si on tient compte des frottements de l'air, la vibration du diapason sera atténuée au cours du temps. Les lois physiques permettent de montrer que chaque composante de fréquence ω de la vibration est au bout d'un temps t (en secondes) multipliée par $\mathrm{e}^{-\frac{\omega t}{1000}}$.
   Représenter l'allure du spectre du diapason au bout d'une seconde.

Quelques valeurs numériques : $\mathrm{e}^{-0.5} \approx 0,6 \quad \mathrm{e}^{-3} \approx 0,05$.

Au bout d'une seconde, la fréquence 440 a son amplitude multipliée par $\mathrm{e}^{-\frac{440}{1000}} \approx 0,6$, celle de la fréquence 2800 est multipliée par $\mathrm{e}^{-\frac{2800}{1000}} \approx 0,05$ et celle de la fréquence 7800 est multipliée par $\mathrm{e}^{-\frac{7800}{1000}} \approx 0,00$.
Ainsi, la fréquence fondamentale est atténuée mais les deux autres fréquences sont quasiment réduites à 0.

4. Peut-on dire que le diapason a un son pur ?

On voit ainsi qu'au bout d'une seconde, la vibration du diapason ne contient plus qu'une seule fréquence. On peut donc dire qu'après une seconde, le son du diapason est pur.

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ **Série de Fourier (8 points)**

On considère la fonction f 2π-périodique définie sur $]0, 2\pi[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

1. Représenter le graphe de f.

2. Calculer les coefficients de Fourier complexes c_n de f et écrire la série de Fourier de f.

   Soit $n \in \mathbf{Z}$. Alors

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\mathrm{e}^{-x-\mathrm{i}nx}}{-1-\mathrm{i}n}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{-2\pi-\mathrm{i}n2\pi}}{-1-\mathrm{i}n} - \frac{1}{-1-\mathrm{i}n} = \frac{1}{2\pi}\frac{1-\mathrm{e}^{-2\pi}}{1+\mathrm{i}n}.$$

   La fonction f se décompose en

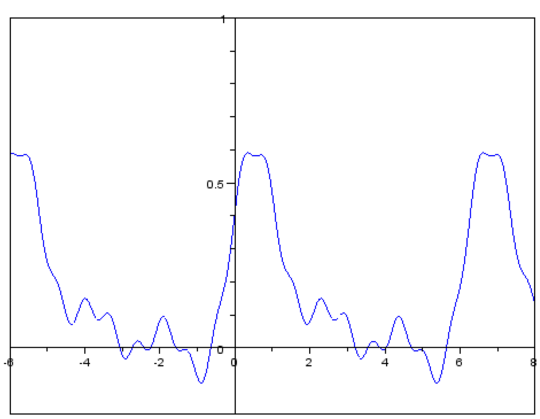
$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-2\pi}}{2\pi(1+\mathrm{i}n)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

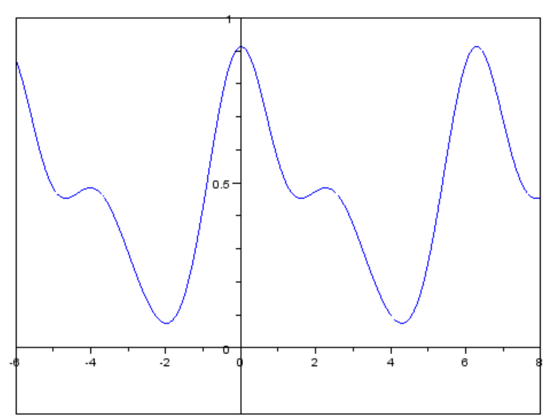
3. La série converge-t-elle en tout point vers f ? La convergence est-elle rapide ?

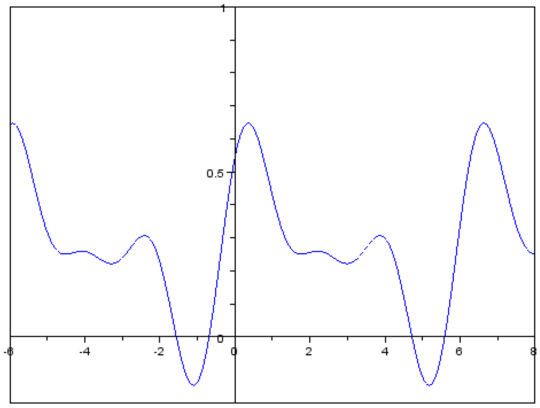
   Les coefficients c_n ont leur module de l'ordre de $\frac{1}{n}$. La convergence de la série n'est donc pas très rapide. Cela est lié au fait que la fonction f est discontinue. On peut de plus affirmer que la série converge bien vers $f(x)$ en tout x où f est continue. Et en les points de discontinuité, la série converge vers la valeur moyenne du saut de continuité.

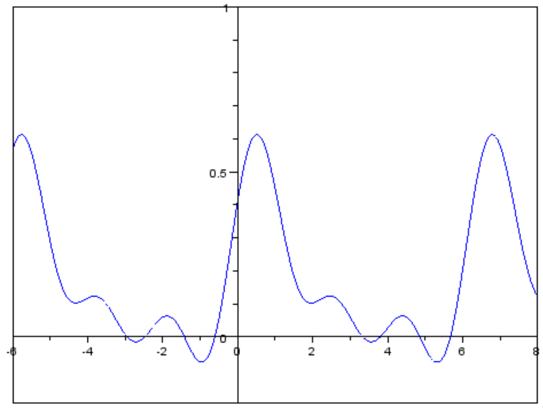
4. Retrouver parmi les graphes ci-dessous le graphe de la somme partielle $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=-3}^{3} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$.

   Justifier votre réponse grâce à vos calculs et/ou des considérations fréquentielles.









La fonction que nous avons tracée contient les trois premières fréquences de la fonction f. Leurs modules sont donnés par

$$|c_0| = \frac{1-\mathrm{e}^{-2\pi}}{2\pi}, \quad |c_1| = |c_{-1}| = \frac{1-\mathrm{e}^{-2\pi}}{2\pi\sqrt{2}}, \quad |c_2| = |c_{-2}| = \frac{1-\mathrm{e}^{-2\pi}}{2\pi\sqrt{5}}, \quad |c_3| = |c_{-3}| = \frac{1-\mathrm{e}^{-2\pi}}{2\pi\sqrt{10}}.$$

Nous pouvons déjà éliminer le premier graphe qui contient des fréquences supérieures à 3 et le second graphe qui ne contient pas de fréquence 3 (et qui a une valeur moyenne trop élevée).
Les deux derniers graphes contiennent les bonnes fréquences. Le troisième a une moyenne autour de 0,2 - 0,3 qui semble trop élevée et l'allure du dernier graphe est plus proche du graphe de f que celle du précédent.
On conclut que le bon graphe est sans doute le quatrième.