Contrôle 1

Exercice 1 **Équation différentielle**

On considère l'équation différentielle

$$xy'(x) + y(x) = x^5 + 3x^3 + 7.$$

Résoudre cette équation différentielle. On pourra chercher une solution particulière sous la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{5} a_n x^n$.

Exercice 2 **Oscillateur harmonique**

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y''(t) + \omega_0^2 y(t) = f(t).$$

Il s'agit de l'équation de l'oscillateur harmonique en régime forcé : $\omega_0 \in \mathbf{R}_+^*$ représente la fréquence propre du système et f représente l'oscillation imposée au système. Cette fonction sera périodique de fréquence ω, impaire et de classe C^1 par morceaux.
La solution y de l'équation est la réponse du système à l'excitation f.

Résolution de l'équation

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. On décompose f en série de Fourier :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega t).$$

On cherche une solution particulière de l'équation (E) sous forme d'une série de Fourier :

$$y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \sin(n\omega t).$$

Injecter y dans l'équation et exprimer les coefficients d_n en fonction des coefficients b_n.

Analyse des résultats

3. Qu'obtient-t-on si ω_0 est très proche de ω ou d'un de ses multiples ? Que cela signifie-t-il pour la réponse y du système ?
4. Comment se comportent les coefficients d_n en fonction des coefficients b_n et de n ? Pour quelles valeurs de n le rapport $\left|\frac{d_n}{b_n}\right|$ est-il maximal ? Quelles fréquences sont les plus efficacement transmises au système ?

Un exemple

5. Soit f 2-périodique définie par $f(t) = t$ pour $t \in]-1, 1[$.
   Calculer la série de Fourier de f et représenter les premières valeurs de son spectre.
6. Donner, pour $\omega_0 = 10$, la solution particulière y correspondante et représenter les premières valeurs de son spectre. Retrouve-t-on bien le résultat de la question 4 ?