Corrigé du contrôle 1

Exercice 1 **Équation différentielle**

On considère l'équation différentielle

$$xy'(x) + y(x) = x^5 + 3x^3 + 7.$$

Résoudre cette équation différentielle. On pourra chercher une solution particulière sous la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{5} a_n x^n$.

On reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 1. On commence par résoudre l'équation homogène associée : $xy'(x) + y(x) = 0$.
Comme le premier coefficient x s'annule en 0, il y aura un problème en 0. Raisonnons sur l'intervalle $\mathbf{R}_+^*$. L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S}_0 = \{\lambda e^{-\int \frac{1}{x}dx} \ ; \ \lambda \in \mathbf{R}\} = \{\frac{\lambda}{x} \ ; \ \lambda \in \mathbf{R}\}$$

Il y a bien un problème un 0. La résolution est la même sur $\mathbf{R}_-^*$ et la seule solution définie sur $\mathbf{R}$ tout entier est la fonction nulle.

Cherchons maintenant une solution particulière. Posons $y_p(x) = \sum_{n=0}^{5} a_n x^n$. Alors y_p est solution ssi

$$x\sum_{n=1}^{5} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{5} a_n x^n = x^5 + 3x^3 + 7.$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{5} (n a_n + a_n) x^n = x^5 + 3x^3 + 7.$$

On identifie les coefficients de ces deux polynômes :

$$a_0 = 7, \quad 2a_1 = 0, \quad 3a_2 = 0, \quad 4a_3 = 3, \quad 5a_4 = 0, \quad 6a_5 = 1.$$

On en déduit les coefficients a_n et ainsi

$$y_p(x) = \tfrac{1}{6}x^5 + \tfrac{3}{4}x^3 + 7.$$

Conclusion : les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme

$$y(x) = \tfrac{1}{6}x^5 + \tfrac{3}{4}x^3 + 7 + \frac{\lambda}{x}, \qquad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Exercice 2 **Oscillateur harmonique**

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y''(t) + \omega_0^2 y(t) = f(t).$$

Il s'agit de l'équation de l'oscillateur harmonique en régime forcé : $\omega_0 \in \mathbf{R}_+^*$ représente la fréquence propre du système et f représente l'oscillation imposée au système. Cette fonction sera périodique de fréquence ω, impaire et de classe C^1 par morceaux.
La solution y de l'équation est la réponse du système à l'excitation f.

Résolution de l'équation

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).

   On résout $y''(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$. On reconnaît une équation linéaire d'ordre 2 à coefficients constants bien connue. Son polynôme caractéristique est $X^2 + \omega_0^0$, ses racines $\pm i\omega_0$ et les solutions de l'équation sont de la forme

$$y(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t), \qquad a, b \in \mathbf{R}.$$

2. On décompose f en série de Fourier :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega t).$$

   On cherche une solution particulière de l'équation (E) sous forme d'une série de Fourier :

$$y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \sin(n\omega t).$$

   Injecter y dans l'équation et exprimer les coefficients d_n en fonction des coefficients b_n.

   La série y est solution ssi $y'' + \omega_0 y = f$ ssi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} -n^2\omega^2 d_n \sin(n\omega t) + \omega_0^2 \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \sin(n\omega t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\omega_0^2 - n^2\omega^2) d_n \sin(n\omega t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega t).$$

   On identifie les coefficients de ces deux séries de Fourier :

$$\forall n, \quad (\omega_0^2 - n^2\omega^2) d_n = b_n \quad \text{donc} \quad d_n = \frac{b_n}{\omega_0^2 - n^2\omega^2}.$$

   Nous avons ainsi déterminé une solution particulière y de l'équation sous forme de série de Fourier.

Analyse des résultats

3. Qu'obtient-t-on si ω_0 est très proche de ω ou d'un de ses multiples ? Que cela signifie-t-il pour la réponse y du système ?

   Notons déjà que si $n\omega = \omega_0$ pour une certaine valeur de n, notre calcul précédent n'est pas valable. Et si $n\omega \approx \omega_0$ pour une certaine valeur de n, alors $\omega_0^2 - n^2\omega^2$ est très faible et le

coefficient d_n correspondant risque d'être très élevé. Autrement dit, au moins un des coefficients de la solution y sera bien plus grand que les coefficients de l'impulsion f. Il s'agit du phénomène de résonance. Le régime forcé possède une fréquence $n\omega$ proche de la fréquence propre du système ω_0 et la réponse du système est amplifiée.
Remarque : si $n\omega = \omega_0$, on ne peut pas trouver de solution sous forme de série de Fourier mais on peut en trouver qui oscilleront en s'amplifiant au fur et à mesure.

4. Comment se comportent les coefficients d_n en fonction des coefficients b_n et de n ? Pour quelles valeurs de n le rapport $\left|\frac{d_n}{b_n}\right|$ est-il maximal ? Quelles fréquences sont les plus efficacement transmises au système ?

   Reprenons $d_n = \frac{b_n}{\omega_0^2 - n^2\omega^2}$. On constate que le dénominateur tend vers ∞ lorsque n tend vers ∞. Donc, sauf éventuellement pour les petites valeurs de n, les coefficients d_n sont atténués par rapport aux coefficients b_n et l'atténuation est d'autant plus grande que n est grand. Donc les hautes fréquences du régime forcé f sont atténuées par le système.
   Le rapport $\left|\frac{d_n}{b_n}\right|$ est maximal quand $\omega_0^2 - n^2\omega^2$ est minimal, c'est-à-dire pour la valeur de n telle que $n\omega$ est le plus proche possible de ω_0. La fréquence $n\omega$ est donc la fréquence de f qui est la mieux transmise au système. C'est cohérent avec la question précédente : la fréquence la mieux transmise est celle qui est la plus proche de la fréquence propre du système. Plus on s'éloigne d'elle (dans les basses ou les hautes fréquences, plus l'atténuation est grande.

Un exemple

5. Soit f 2-périodique définie par $f(t) = t$ pour $t \in]-1, 1[$.
   Calculer la série de Fourier de f et représenter les premières valeurs de son spectre.

   On calcule
   $$b_n = \int_{-1}^{1} t\sin(\pi n t)dt = -\frac{2(-1)^n}{n\pi}.$$
   Ainsi (sauf aux points de discontinuité),
   $$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{2(-1)^n}{n\pi}\sin(\pi n t).$$

6. Donner, pour $\omega_0 = 10$, la solution particulière y correspondante et représenter les premières valeurs de son spectre. Retrouve-t-on bien le résultat de la question 4 ?

   Comme f est 2-périodique, la valeur de ω correspondante est π (voir la série de f). On peut ainsi calculer les coefficients de y avec la formule
   $$d_n = \frac{b_n}{\omega_0^2 - n^2\omega^2} = -\frac{2(-1)^n}{\pi n(100 - n^2\pi^2)}.$$
   On constate après calcul numérique que le plus grand coefficient d_n de y est d_3, les autres étant tous très faibles. Cela est cohérent avec la question 4. La fréquence $n\pi$ est la plus proche de la fréquence propre $\omega_0 = 10$ pour $n = 3$. La fréquence 3π est la fréquence la mieux transmise au système par f.