Contrôle

Poly de cours autorisé et calculatrice interdite.
Toutes les réponses doivent être justifiées et correctement rédigées.

Exercice 1 : refroidissement

On considère une tige en cuivre de longueur $\frac{1}{5} = 0,2m$. Elle est initialement à $100°C$ puis est mise en contact en ses extrémités avec un milieu à $0°C$.

Quelle est approximativement sa température en son milieu après $10s$?

Coefficient de diffusivité thermique du cuivre dans l'équation de la chaleur : $c = 117 \cdot 10^{-6} m^2 s^{-1}$.

Exercice 2 : dispersion d'onde

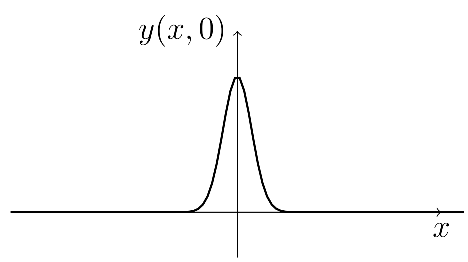
On considère un problème de propagation d'ondes. L'équation ci-dessous est un modèle simplifié permettant de décrire le mouvement des vagues lorsque le fond est peu profond :

$$(E): \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3},$$

$y(x,t)$ représentant la hauteur de la vague en x à l'instant t. On ne considère pas de conditions au bord.

On cherche plus particulièrement les ondes qui se propagent sans se déformer. Il s'agit des solutions de l'équation de la forme $y(x,t) = f(x - vt)$ où v représente la vitesse de propagation de l'onde.

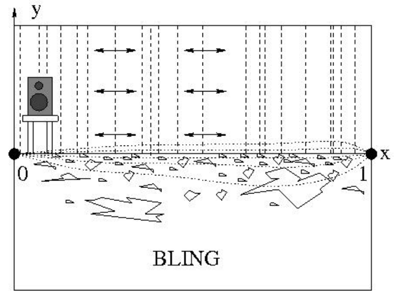
1. Soit $\omega \in \mathbf{R}^*$. Déterminer v tel que $y_\omega(x,t) = e^{i\omega(x-vt)}$ soit solution de l'équation.
2. Interpréter : dans quelle direction se déplacent ces vagues ? Quelle différence y a-t-il entre les propagations de deux solutions y_ω différentes ?
3. Justifier qu'une somme de solutions y_ω est encore solution de l'équation.
4. On considère une vague initialement isolée comme celle ci-contre.
   Écrire la décomposition d'une fonction $y(x,0)$ dans la base de Fourier à l'aide du théorème d'inversion, puis donner l'expression de la solution $y(x,t)$ sous forme intégrale.

5. Comment se propage la vague ? Essayer de la représenter à différents instants t.
6. Prenons pour $y(x,0)$ la fonction triangle : $y(x,0) = \begin{cases} 1-x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1+x & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   Calculer sa transformée de Fourier et donner la solution $y(x,t)$ correspondante.
7. Essayons de résoudre complètement l'équation E. Passer à la transformée de Fourier en x dans l'équation, obtenir une équation différentielle en t et en déduire l'expression de $\hat{y}(\omega,t)$.

Exercice 3 : problème de voisinage



Mon voisin du dessus écoute de la musique trop fort. L'onde sonore qui en découle modifie la pression de l'air dans son salon, pression qui s'exerce sur mon plafond et le fait vibrer. C'est la vibration du plafond qui permet de transmettre à la pièce du dessous (mon salon) une partie du son initial..

On note $y(x,t)$ la hauteur du plafond au point x et à l'instant t. En négligeant un certain nombre de paramètres, l'évolution de y est décrite par l'équation des cordes vibrantes, donnée ici par

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \nu^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{d} P, \tag{1}$$

où ν est un réel positif dépendant de la nature du plafond, d est l'épaisseur du plafond et P est la pression de l'air s'exerçant sur le plafond. Cette fonction est directement liée à la musique du voisin. On peut la décomposer sous la forme

$$P(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n\pi x)(A_n \cos(n\pi\mu t) + A'_n \sin(n\pi\mu t)),$$

où μ est un nombre réel positif et les A_n et A'_n sont des paramètres réels.

L'équation homogène associée à (1) est l'équation des ondes étudiée en cours. Nous allons simplement déterminer une solution particulière du problème.

1. Déterminer une solution particulière de l'équation (1) sous la forme

$$y_p(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n\pi x)(B_n \cos(n\pi\mu t) + B'_n \sin(n\pi\mu t)).$$

   Il s'agit de trouver les coefficients B_n et B'_n en fonction des A_n et A'_n. Les premiers forment le spectre de la partie du son transmise à travers le plafond et les seconds le spectre du son du voisin.

2. Décrire le plus complètement possible le son transmis par rapport au son initial : quelles fréquences sont les mieux transmises ? Quelle est l'influence de l'épaisseur d du plafond dans la transmission des sons ? Qu'obtient-on si μ est proche de ν ? Expliquer.