Contrôle

Poly de cours autorisé et calculatrice interdite.
Toutes les réponses doivent être justifiées et correctement rédigées.

Exercice 1 : refroidissement

On considère une tige en cuivre de longueur $\frac{1}{5} = 0,2m$. Elle est initialement à $100°C$ puis est mise en contact en ses extrémités avec un milieu à $0°C$.

Quelle est approximativement sa température en son milieu après $10s$?

Coefficient de diffusivité thermique du cuivre dans l'équation de la chaleur : $c = 117 \cdot 10^{-6} m^2 s^{-1}$.

C'est une application directe du cours. La température est donnée par

$$T(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin(\tfrac{k\pi}{L}x) e^{-ct(\frac{k\pi}{L})^2},$$

avec pour tout k,

$$A_k = \frac{2}{L}\int_0^L T_0(x)\sin(\tfrac{k\pi}{L}x)dx.$$

Donc ici :

$$A_k = \frac{2}{1/5}\int_0^{1/5} 100\sin(5k\pi x)dx = \frac{200}{k\pi}(1-(-1)^k).$$

Et

$$T(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin(5k\pi x) e^{-ct(5k\pi)^2}.$$

La série converge très rapidement grâce à l'exponentielle et on peut approcher sa somme par ses trois premiers termes pour obtenir un bon ordre de grandeur du résultat recherché :

$$T(1/10,10) \approx \frac{400}{\pi}\sin(\pi/2)e^{-10c(5\pi)^2} + \frac{400}{3\pi}\sin(3\pi/2)e^{-10c(15\pi)^2} \approx 92.$$

Exercice 2 : dispersion d'onde

On considère un problème de propagation d'ondes. L'équation ci-dessous est un modèle simplifié permettant de décrire le mouvement des vagues lorsque le fond est peu profond :

$$(E): \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3},$$

$y(x,t)$ représentant la hauteur de la vague en x à l'instant t. On ne considère pas de conditions au bord.

On cherche plus particulièrement les ondes qui se propagent sans se déformer. Il s'agit des solutions de l'équation de la forme $y(x,t) = f(x - vt)$ où v représente la vitesse de propagation de l'onde.

1. Soit $\omega \in \mathbf{R}^*$. Déterminer v tel que $y_\omega(x,t) = e^{i\omega(x-vt)}$ soit solution de l'équation.

   On injecte y_ω dans l'équation :

   $$-i\omega v e^{i\omega(x-vt)} = -i\omega^3 e^{i\omega(x-vt)}.$$

   Cette relation n'est possible que si $-i\omega v = -i\omega^3$. Il faut donc que $v = \omega^2$.

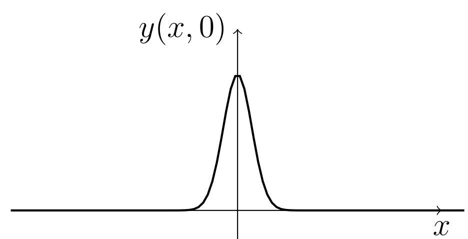
2. Interpréter : dans quelle direction se déplacent ces vagues ? Quelle différence y a-t-il entre les propagations de deux solutions y_ω différentes ?

   Nos solutions précédentes sont donc de la forme $e^{i\omega(x-\omega^2 t)}$. Comme $\omega^2 > 0$, il s'agit d'ondes se propageant dans le sens des x positifs (vers la droite donc). La constante ω représente la fréquence de l'onde et donc sa forme (les vagues sont plus ou moins rapprochées). Et ω^2 représente la vitesse de propagation de l'onde. Ainsi plus l'onde est à haute fréquence et plus elle se propage rapidement.

3. Justifier qu'une somme de solutions y_ω est encore solution de l'équation.

   L'équation étudiée est une équation linéaire. Une somme de solutions de cette équation est donc encore solution.

4. On considère une vague initialement isolée comme celle ci-contre.
   Écrire la décomposition d'une fonction $y(x,0)$ dans la base de Fourier à l'aide du théorème d'inversion, puis donner l'expression de la solution $y(x,t)$ sous forme intégrale.

   Écrivons $y(x,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(\omega,0)e^{i\omega x}dx$. On a vu que toutes les fonctions de la forme $e^{i\omega(x-\omega^2 t)}$ sont solutions. Comme l'équation est linéaire, toute combinaison linéaire de ces fonctions est encore solution. En considérant que cela est encore valable pour les sommes intégrales, on peut penser que la fonction $y(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(\omega,0)e^{i\omega(x-\omega^2 t)}dx$ sera solution de l'équation. Et elle coïncide bien à $t=0$ avec la fonction initiale $y(x,0)$.

5. Comment se propage la vague ? Essayer de la représenter à différents instants t.

   La vague initiale est donnée par $y(x,0)$ que l'on a décomposé selon toutes ses fréquences. Chacune de ses composantes se propage à une certaine vitesse : les basses fréquences vont se propager lentement et les hautes rapidement. On va ainsi observer un phénomène de dispersion d'onde : la vague initiale va se disloquer en plusieurs vagues se propageant à des vitesses différentes.

6. Prenons pour $y(x,0)$ la fonction triangle : $y(x,0) = \begin{cases} 1-x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1+x & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   Calculer sa transformée de Fourier et donner la solution $y(x,t)$ correspondante.

Il s'agit de calculer

$$\hat{y}(\omega, 0) = \int_{-1}^{0} (1+x)e^{-i\omega x}dx + \int_{0}^{1} (1-x)e^{-i\omega x}dx$$

puis d'injecter le résultat dans la formule de la question 4.

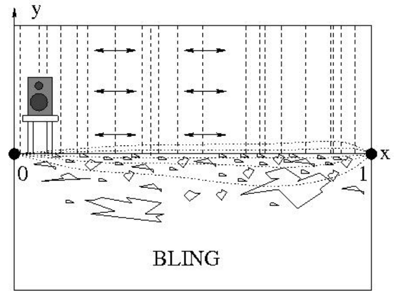
7. Essayons de résoudre complètement l'équation E. Passer à la transformée de Fourier en x dans l'équation, obtenir une équation différentielle en t et en déduire l'expression de $\hat{y}(\omega, t)$.

On passe à la transformée en x dans l'équation : $\widehat{\frac{\partial y}{\partial t}} = \widehat{\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}}$. En appliquant la formule de dérivation trois fois au second terme, on obtient $\widehat{\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}} = -i\omega^3 \hat{y}(\omega, t)$. Pour le premier terme, cela ne fonctionne pas car il s'agit d'une transformée en x d'une dérivée en t. En s'autorisant une interversion dérivée-intégrale on peut obtient $\widehat{\frac{\partial y}{\partial t}} = \frac{\partial \hat{y}}{\partial t}$. Finalement $\frac{\partial \hat{y}}{\partial t} = -i\omega^3 \hat{y}(\omega, t)$.
On a obtenu une équation différentielle (de variable t) satisfaite par $\hat{y}$. On la résout et on obtient

$$\hat{y}(\omega, t) = \lambda e^{-i\omega^3 t},$$

où la constante λ peut dépendre de ω.
Enfin à partir d'une condition initiale 'à $t = 0$, on pourrait déterminer l'expression de λ. Il en resterait qu'à déduire l'expression de $y(x, t)$ à l'aide du théorème d'inversion.

Exercice 3 : problème de voisinage



Mon voisin du dessus écoute de la musique trop fort. L'onde sonore qui en découle modifie la pression de l'air dans son salon, pression qui s'exerce sur mon plafond et le fait vibrer. C'est la vibration du plafond qui permet de transmettre à la pièce du dessous (mon salon) une partie du son initial..

On note $y(x,t)$ la hauteur du plafond au point x et à l'instant t. En négligeant un certain nombre de paramètres, l'évolution de y est décrite par l'équation des cordes vibrantes, donnée ici par

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \nu^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{d}P, \tag{1}$$

où ν est un réel positif dépendant de la nature du plafond, d est l'épaisseur du plafond et P est la pression de l'air s'exerçant sur le plafond. Cette fonction est directement liée à la musique du voisin. On peut la décomposer sous la forme

$$P(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n\pi x)(A_n \cos(n\pi\mu t) + A'_n \sin(n\pi\mu t)),$$

où μ est un nombre réel positif et les A_n et A'_n sont des paramètres réels.

L'équation homogène associée à (1) est l'équation des ondes étudiée en cours. Nous allons simplement déterminer une solution particulière du problème.

1. Déterminer une solution particulière de l'équation (1) sous la forme

$$y_p(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n\pi x)(B_n \cos(n\pi\mu t) + B'_n \sin(n\pi\mu t)).$$

Il s'agit de trouver les coefficients B_n et B'_n en fonction des A_n et A'_n. Les premiers forment le spectre de la partie du son transmise à travers le plafond et les seconds le spectre du son du voisin.

On injecte la fonction y_p dans l'équation :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n\pi x)(-n^2\pi^2\mu^2 B_n \cos(n\pi\mu t) - n^2\pi^2\mu^2 B'_n \sin(n\pi\mu t)) = \nu^2 \sum_{n=1}^{+\infty} -n^2\pi^2 \sin(n\pi x)(B_n \cos(n\pi\mu t) + B'_n \sin($$

On regroupe tous les termes et on identifie les coefficients des séries de Fourier obtenues :

$$\forall n, \quad -n^2\pi^2\mu^2 B_n = -\nu^2 n^2\pi^2 B_n + \tfrac{1}{d}A_n \quad \text{et} \quad -n^2\pi^2\mu^2 B'_n = -\nu^2 n^2\pi^2 B'_n + \tfrac{1}{d}A'_n.$$

Ainsi les coefficients de la solution y_p sont donnés par

$$\forall n, \quad B_n = \frac{A_n}{dn^2\pi^2(\nu^2-\mu^2)}, \qquad B'_n = \frac{A'_n}{dn^2\pi^2(\nu^2-\mu^2)}.$$

2. Décrire le plus complètement possible le son transmis par rapport au son initial : quelles fréquences sont les mieux transmises ? Quelle est l'influence de l'épaisseur d du plafond dans la transmission des sons ? Qu'obtient-on si μ est proche de ν ? Expliquer.

   On constate que les coefficients B_n (et B'_n) sont donnés par les coefficients A_n (et A'_n) avec un coefficient d'atténuation $dn^2\pi^2(\nu^2 - \mu^2)$. Ainsi les fréquences de P sont transmises à la vibration de l'air du voisin en étant atténuées.
   On remarque que ce coefficient est d'autant plus grand que n est grand. Autrement dit, les basses fréquences sont mieux transmises que les hautes. Le plafond agit comme un passe-bas !
   On remarque également que l'épaisseur du plafond joue un rôle dans l'atténuation.
   Enfin, ce qui précède devient faux lorsque $\nu \approx \mu$. Dans ce cas, le coefficient peut être supérieur à 1 et les sons sont amplifiés au lieu d'être atténués. Il s'agit d'un phénomène de résonance : la fréquence μ du son P est très proche de la fréquence propre ν de vibration du plafond. Les valeurs obtenues ici cessent alors d'être rigoureuses, nous ne sommes plus dans le cadre de petites oscillations et il faudrait reprendre le modèle pour décrire plus précisément le phénomène.