TD 6 : continuité et dérivées partielles

Exercice 1 **Continuité**

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y} \text{ si } y \neq 0 \quad \text{et} \quad f(x,y) = 0 \text{ sinon.}$$

1. Sur quelle partie de $\mathbf{R}^2$ la fonction f est-elle continue d'après les théorèmes généraux ?
2. Soit $x_0 \neq 0$. Montrer que f n'est pas continue en $(x_0, 0)$.
3. Étudions maintenant la continuité de f en $(0,0)$. Considérer les droites passant par l'origine. La droite d'équation $y = ax$ peut se paramétrer par $\gamma_a(t) = (t, at)$. Évaluer f le long de ces droites. Qu'obtient-on lorsqu'on fait tendre t vers 0 ? Que peut-on conclure ?
4. Considérer maintenant les chemins paramétrés par $\gamma_1(t) = (t, t^2)$ et $\gamma_2(t) = (t, t^3)$. Les représenter puis évaluer f le long de ces chemins. Qu'obtient-on lorsqu'on fait tendre t vers 0 ? Que peut-on conclure ?

1. La fonction f est définie par une expression algébrique en tout point (x, y) tel que $y \neq 0$, c'est-à-dire sur le plan privé de l'axe des abscisse : $\mathbf{R}^2 \setminus Ox$. Cette expression est un quotient de fonctions continues, donc f est continue sur $\mathbf{R}^2 \setminus Ox$ d'après les théorèmes généraux.
2. Soit $x_0 \neq 0$. Approchons le point (x_0, y) dans la direction verticale. Soit donc $(x_0, y) \in \mathbf{R}^2$ avec $y \neq 0$.
   Alors $|f(x_0, y) - f(x_0, 0)| = \left|\frac{x_0^2}{y}\right|$.
   Comme $x_0 \neq 0$, on déduit que $|f(x_0, y) - f(x_0, 0)|$ diverge vers $+\infty$ lorsque y tend vers 0. Donc lorsque (x_0, y) converge vers le point $(x_0, 0)$, $f(x_0, y)$ ne converge pas vers $f(x_0, 0)$: la fonction f est discontinue en $(x_0, 0)$.
3. Évaluons f sur la droite d'équation $y = ax$ avec $a \neq 0$: pour $t \neq 0$, $f(\gamma(t)) = f(t, at) = \frac{t}{a}$. Donc $f(t, at)$ converge vers $0 = f(0,0)$ lorsque t tend vers 0. De même, si $a = 0$, $f(t, 0) = 0$ qui converge également vers $f(0,0)$ lorsque t tend vers 0.
   Ainsi, le long de chaque droite passant par l'origine, on obtient que $f(x, y)$ converge vers $f(0,0)$ lorsque (x, y) tend vers $(0,0)$. Mais on ne peut pas encore conclure que f est continue en $(0,0)$. Il faut pour cela que la convergence soit satisfaite le long de tous les chemins convergeant vers $(0,0)$, pas seulement les droites !
4. Le long de ce nouveau chemin, on obtient :

   $$f(\gamma_1(t)) = f(t, t^2) = 1 \nrightarrow 0$$

   Les points (t, t^2) de ce chemin convergent vers le point $(0,0)$ lorsque t tend vers 0, pourtant $f(t, t^2)$ ne converge pas vers $f(0,0)$. La fonction f est donc discontinue

en $(0,0)$.
De même $f(\gamma_2(t)) = f(t,t^3) = \frac{1}{t} \nrightarrow +\infty$.
Le long de ce chemin, c'est pire ; non seulement la fonction ne converge pas vers 0, mais elle diverge même vers l'infini.

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ **Continuité**

Étudier la continuité des fonctions suivantes sur $\mathbf{R}^2$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^4}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \ell(x,y) = \begin{cases} x^y & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour les quatre fonctions, on commence par invoquer les théorèmes généraux pour justifier qu'elles sont continues partout où elles sont définies par une expression algébrique. Puis, en les points (x_0,y_0) où la fonction est définie « par recollement », on peut commencer par essayer de montrer qu'elle est continue en majorant $|\varphi(x,y) - \varphi(x_0,y_0)|$ par une expression contenant $\|(x,y)-(x_0,y_0)\|$ qui convergera vers 0 lorsque (x,y) tend vers (x_0,y_0).
Si cela ne marche pas, on peut penser qu'il y a une discontinuité. Dans ce cas, on cherche un chemin passant par (x_0,y_0) le long duquel la fonction φ ne converge pas vers $\varphi(x_0,y_0)$ en (x_0,y_0). On peut commencer par tester des chemins simples (horizontaux, verticaux) puis si ça ne marche pas des chemins moins triviaux.

La fonction f est continue sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ d'après les théorèmes généraux. Elle est discontinue en $(0,0)$. En effet, le long de l'axe vertical, pour $t \neq 0$:

$$f(t,0) = \frac{t^2+0}{t^4+0} = \frac{1}{t^2} \to +\infty$$

lorsque t tend vers 0. En particulier $(t,0)$ converge vers $(0,0)$ quand $t \to 0$, mais $f(t,0)$ ne converge pas vers $f(0,0)$. Il y a une discontinuité.

La fonction g est continue sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ d'après les théorèmes généraux. Elle est également continue en $(0,0)$. En effet, pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$$|g(x,y) - g(0,0)| = \left| \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leqslant \frac{|xy|}{\|(x,y)\|} \leqslant \frac{x^2+y^2}{2\|(x,y)\|} = \frac{\|(x,y)\|^2}{2\|(x,y)\|} = \frac{1}{2}2\|(x,y)\|.$$

(On a utilisé la majoration $|\sin(X)| \leqslant |X|$ et le lemme magique.)
Par définition, (x,y) converge vers $(0,0)$ signifie que $\|(x,y)\|$ tend vers 0, et nos majorations permettent de conclure que $g(x,y)$ converge vers $f(0,0)$. C'est la définition de la continuité de g en 0.

D'après les théorèmes généraux, la fonction h est continue en tout point du plan, sauf éventuellement ceux de la droite D d'équation $y = x$.

Elle est discontinue en tout point de cette droite. Pour le démontrer, il faut distinguer deux cas.
Soit $(x_0, x_0) \in D$ avec $x_0 \neq 0$. Considérons la droite horizontale passant par ce point. Elle est paramétrée par (t, x_0). Pour $t \neq x_0$, $h(t, x_0) = \frac{tx_0}{t-x_0}$. Comme $x_0 \neq 0$, cette expression diverge vers $\pm\infty$ lorsque t tend vers x_0. Donc $h(t, x_0)$ ne converge pas vers $h(x_0, x_0) = 0$ lorsque (t, x_0) converge vers (x_0, x_0). La fonction est bien discontinue en ce point.
Si $x_0 = 0$, le raisonnement précédent ne marche pas et il faut trouver un autre chemin pour montrer la discontinuité. L'idée est de s'approcher de $(0, 0)$ par un chemin proche de la droite D. On propose la courbe paramétrée par $(t, t + t^2)$ (le terme t^2 étant négligeable par rapport à t au voisinage de 0, la droite D est tangente à cette courbe en $(0, 0)$). Alors le long de ce chemin : $h(t, t + t^2) = \frac{t(t+t^2)}{t-(t+t^2)} = -(1 + t) \to -1$ lorsque t tend vers 0. Donc $h(t, t + t^2)$ ne converge pas vers $h(0, 0)$ lorsque $(t, t + t^2)$ tend vers $(0, 0)$. Il y a bien une discontinuité.

La fonction ℓ est immédiatement continue sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ et sur $\mathbf{R}_-^* \times \mathbf{R}$. Il n'y a que sur l'axe des ordonnées qu'il faut étudier plus en détail. Et il faut distinguer 3 cas.
Soit $(0, y_0) \in Oy$ avec $y_0 > 0$. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Si $x \leqslant 0$, alors $\ell(x, y) = 0 = \ell(0, y_0)$. En un sens, il y a clairement continuité à gauche (en un sens qu'il faudrait préciser) de ℓ en $(0, y_0)$. Si $x > 0$, $\ell(x, y) = x^y = \mathrm{e}^{y \ln(x)}$. On aimerait dire que lorsque (x, y) converge vers $(0, y_0)$, $y \ln(x)$ tend vers $y_0 \ln(0) = -\infty$ puisque $y_0 > 0$. Pour le faire rigoureusement, fixons $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $y_0 - \varepsilon > 0$. Alors, si $\|(x, y) - (0, y_0)\| < \varepsilon$, alors en particulier $0 < x < \varepsilon$ et $y_0 - \varepsilon < y$, donc $y \ln(x) < (y_0 - \varepsilon) \ln(\varepsilon)$. En faisant tendre ε vers 0, cette expression diverge vers $-\infty$ et on déduit que x^y converge bien vers $0 = \ell(0, y_0)$. La fonction est continue en $(0, y_0)$

Si $y_0 < 0$, l'idée est la même mais il y a cette fois-ci discontinuité. Prenons le chemin horizontal situé à droite de $(0, y_0)$. Le long de ce chemin, $\ell(t, y_0) = t^{y_0} = \mathrm{e}^{y_0 \ln(t)}$. Comme $y_0 < 0$, on montre que $\ell(t, y_0)$ diverge vers $+\infty$ quand t tend vers 0^+. Il y a donc discontinuité de ℓ en $(0, y_0)$.

Enfin, si $y_0 = 0$, il y a encore discontinuité et le chemin précédent fonctionne encore : $\ell(t, 0) = t^0 = 1$ qui ne converge pas vers $\ell(0, 0) = 0$.

Exercice 3 **Dérivées partielles**

Déterminer les dérivées partielles en $(0, 0)$ de la fonction f définie par

$$f(x, y) = 7 + \sin^2(xy) \cdot \mathrm{e}^{\arctan(x^2 y) + 2x^3}.$$

Indication : c'est facile.

Il y a deux méthodes : calculer les dérivées partielles de f en utilisant les règles de dérivation des expressions algébriques puis les évaluer en $(0, 0)$.
Seconde méthode (plus adaptée puisqu'on ne demande pas les formules générales des dérivées partielles) : revenir à la définition donnée par les limites de taux d'accroissement.

Pour dériver en x la fonction $(0, 0)$, on regarde comment elle varie horizontalement au voisinage de $(0, 0)$: $f(x, 0) - f(0, 0) = (7 + 0) - 7 = 0$. Donc $\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$ qui converge

trivialement vers 0. Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.
De même, $f(0,y) - f(0,0) = 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Exercice 4 **Dérivées partielles secondes**

Soit f la fonction définie par : $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1. Déterminer pour tous x et y les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$.
2. En déduire les valeurs de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$. Qu'en conclure ?

Là encore, on va éviter de dériver cette fonction de manière classique, les taux d'accroissements sont ici plus simples.

$$\frac{f(x,y) - f(0,y)}{x-0} = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \rightarrow_{x\to 0} -y.$$

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$.

De même,

$$\frac{f(x,y) - f(x,0)}{y-0} = x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \rightarrow_{x\to 0} x.$$

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$.

La dérivée en y de la première dérivée partielle est immédiate : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,y) = \dfrac{\partial(-y)}{\partial y}(0,y) = -1$, donc en particulier $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$.

De même, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,0) = \dfrac{\partial x}{\partial x}(x,0) = 1$, donc en particulier $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$.

Conclusion : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$. La conclusion du théorème de Schwarz n'est pas vérifiée. On peut en déduire que la fonction f n'est pas de classe C^2 : ses dérivées partielles secondes ne sont pas continues en $(0,0)$.