Contrôle 1

Documents et calculatrice sont interdits.
Le barème est donné à titre indicatif.

QCM

Déterminer pour chaque question l'unique bonne réponse. Aucune justification n'est attendue.

Barème : **1 point** par bonne réponse ; **-0,25 point** par mauvaise réponse ; ne répondre que lorsqu'on est certain de sa réponse.

1. Parmi ces quatre fonctions, laquelle n'est pas équivalente aux trois autres en 0 ?

   a. $(1+2x)\ln(1+2x)$ **b.** $1-\cos\left(\sqrt{2x}\right)$ **c.** $x+3x^2-2x^3$ **d.** $\dfrac{\sin^2(x)}{\mathrm{e}^x-1}$

   a : les trois autres sont équivalents à x en 0 ; le premier est équivalent à $2x$.

2. Laquelle de ces propositions est vraie ?

   a. $x=\mathrm{o}_0(x^2)$ **b.** $\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{o}_0(x)$ **c.** $x=\mathrm{o}_0(x\ln(x))$ **d.** $\sin(x)=\mathrm{o}_0(x)$

   c : $\dfrac{x}{x\ln(x)}$ est le seul quotient qui converge vers 0 en 0.

3. Parmi ces quatre fonctions, laquelle est négligeable par rapport aux trois autres en $+\infty$?

   a. $x^2\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ **b.** $\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^7}$ **c.** $x\,\mathrm{e}^x$ **d.** $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x\ln(x)}$

   a : c'est le terme dans l'exponentielle qui est ici déterminant, les termes polynomiaux et logarithmique ne pèsent pas pour comparer ces fonctions.

4. Quelle expression obtient-on en développant $\left(1+\dfrac{x}{3}-\dfrac{x^2}{9}+\mathrm{o}_0(x^2)\right)^3$?

   a. $1+\mathrm{o}_0(x^2)$ **b.** $1+x+\mathrm{o}_0(x^2)$ **c.** $1-\frac{1}{3}x^2+\mathrm{o}_0(x^2)$ **d.** $1+x-\frac{1}{3}x^2+\mathrm{o}_0(x^2)$

   b : les termes du développement du cube en 1, x et x^2 sont :

   $$1+3\times(1\cdot1\cdot\tfrac{x}{3})+3\times(1\cdot1\cdot(-\tfrac{x^2}{9}))+3\times(1\cdot\tfrac{x}{3}\cdot\tfrac{x}{3})$$

Exercices

Les sept questions sont indépendantes, toutes notées sur **1,5 points**. Les réponses doivent être justifiées.

1. Donner un équivalent en $+\infty$, le plus simple possible, de la suite : $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

   Nous obtenons $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$. Voici deux preuves :
   $$u_n = \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right).$$
   Or $\frac{1}{n} \to 0$ en $+\infty$ et, d'après le cours, $\sqrt{1+x} - 1 \sim_{+\infty} \frac{x}{2}$.
   Par composition, $\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 \sim_{+\infty} \frac{1}{2n}$. Donc :
   $$u_n \sim_{+\infty} \sqrt{n} \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$
   Seconde preuve :
   $$u_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$
   Alors :
   $$\frac{1/(2\sqrt{n})}{u_n} = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{2} \to 1$$
   lorsque n tend vers $+\infty$. Donc $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

2. Soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$. Démontrer que si $f \sim_a g$ et $h = \mathrm{o}_a(f)$, alors $f + h \sim_a g$.

   Par hypothèse, $\frac{f}{g} \to_a 1$ et $\frac{h}{f} \to_a 0$. Alors $\frac{f+h}{g} = \frac{f}{g} + \frac{h}{g} = \frac{f}{g} + \frac{h}{f} \times \frac{f}{g} \to_a 1 + 0 \times 1 = 1$.
   Donc $f + h \sim_a g$.

3. Calculer le DL_6 de $\sin^2(x)\cosh(x^2)$ en 0.
   On ne demande pas de simplifier le coefficient en x^6.

   Rappelons les DL usuels : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}(x^6)$ et $\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^4)$.
   Par composition (comme $x^2 \to 0$ quand $x \to 0$) : $\cosh(x) = 1 + \frac{x^4}{2} + \mathrm{o}(x^6)$.
   Calculons : $\sin^2(x) = (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}(x^6))^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{60} + \frac{x^6}{36} + \mathrm{o}(x^6)$.
   Ainsi :
   $$\begin{aligned}\sin^2(x)\cosh(x^2) &= \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + (\tfrac{1}{60} + \tfrac{1}{36})x^6 + \mathrm{o}(x^6)\right)\left(1 + \frac{x^4}{2} + \mathrm{o}(x^6)\right) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + (\tfrac{1}{60} + \tfrac{1}{36})x^6 + \frac{x^6}{2} + \mathrm{o}(x^6) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + (\tfrac{1}{60} + \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{2})x^6 + \mathrm{o}(x^6) \\ &= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{49}{90}x^6 + \mathrm{o}(x^6)\end{aligned}$$

4. Calculer le DL_2 de $\dfrac{x}{\ln(1+x)}$ en 0.

En raison de la présence de x au numérateur, il faut utiliser au dénominateur un DL d'ordre 3 : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$.
Alors, en composant avec le DL de $\frac{1}{1-X}$:

$$\begin{aligned}\frac{x}{\ln(1+x)} &= \frac{x}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \mathrm{o}(x^2)} \\ &= 1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3}\right) + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3}\right)^2 + \mathrm{o}(x^2) \\ &= 1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3}\right) + \frac{x^2}{4} + \mathrm{o}(x^2) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 + \mathrm{o}(x^2)\end{aligned}$$

5. Déterminer : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sinh(x^2)}{\mathrm{e}^{-2x^2} - \cos(2x)}$.

À partir des DL usuels, nous obtenons :

$$\frac{x^2\sinh(x^2)}{\mathrm{e}^{-2x^2} - \cos(2x)} = \frac{x^4 + \mathrm{o}(x^4)}{(1 + 2x^2 + 2x^4) - (1 + 2x^2 + \frac{16}{24}x^4) + \mathrm{o}(x^4)} = \frac{x^4 + \mathrm{o}(x^4)}{\frac{4}{3}x^4 + \mathrm{o}(x^4)} = \frac{1 + \mathrm{o}(1)}{\frac{4}{3} + \mathrm{o}(1)}.$$

Comme $\mathrm{o}_0(1) \to 0$ en 0 par définition, nous déduisons :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sinh(x^2)}{\mathrm{e}^{-2x^2} - \cos(2x)} = \frac{3}{4}.$$

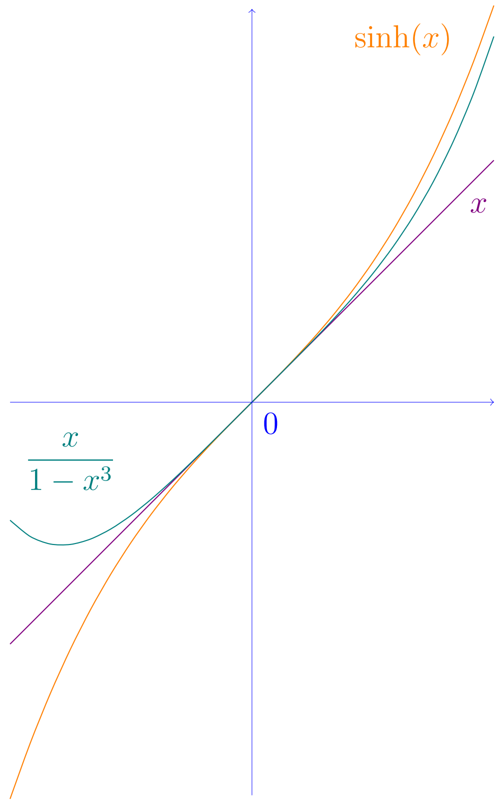
6. Représenter, au voisinage de 0, l'allure des graphes des fonctions $x \mapsto \sinh(x)$ et $x \mapsto \dfrac{x}{1-x^3}$, ainsi que de leur tangente commune en 0, en précisant bien les positions relatives de ces trois courbes à partir de leurs DL.

Nous savons qu'au voisinage de 0 : $\sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)$.
Lorsque $x > 0$, $\frac{x^3}{6} > 0$, donc $\sinh(x) > x$ au voisinage de 0, du côté $x > 0$.
Et lorsque $x < 0$, $\frac{x^3}{6} < 0$, donc $\sinh(x) < x$ au voisinage de 0, du côté $x < 0$.
. Ainsi, le graphe de sinh franchit sa tangente en 0 : elle possède un point d'inflexion en 0.

De même : $\frac{x}{1-x^3} = x(1 + x^3 + \mathrm{o}(x^3)) = x + x^4 + \mathrm{o}(x^4)$.
Comme $x^4 > 0$ au voisinage de 0, nous déduisons que $\frac{x}{1-x^3} > x$ au voisinage de 0 : son graphe est situé au-dessus de sa tangente.

Enfin, lorsque $x > 0$, comme $x^4 < x^3$ au voisinage de 0, nous déduisons que $\frac{x}{1-x^3} < \sinh(x)$ au voisinage de 0.

Nous pouvons ainsi représenter les trois graphes demandés et leurs positions relatives :



Remarque : le graphe est très exagéré. Sur les vrais graphes, l'inégalité $\frac{x}{1-x^3} < \sinh(x)$ est valable approximativement pour x compris entre 0 et 0.16, et l'écart entre les deux fonctions est inférieur à 10^{-4} sur cet intervalle.

7. Calculer une valeur numérique approchée de $\ln(1{,}1)$ avec une précision garantie de 10^{-3}.

   Il s'agit d'estimer $\ln(1+x)$ pour $x = 0{,}1$. D'après la formule de Taylor-Lagrange, $\ln(1+x)$ est approché par son DL_n en 0, avec une erreur inférieure à

$$\left|\frac{\ln^{(n+1)}(1+x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|.$$

   Or $|\ln^{(n+1)}(1+x)| = \left|(-1)^{n+1}\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}\right| \leqslant n!$ pour $x \geqslant 0$.
   Nous cherchons donc n tel que $\frac{n!}{(n+1)!}(0{,}1)^{n+1} = \frac{(0{,}1)^{n+1}}{n+1} < 10^{-3}$. Nous trouvons comme plus petite valeur $n = 2$.
   Conclusion :

$$\ln(1{,}1) \approx 0{,}1 - \frac{(0{,}1)^2}{2} = 0{,}995 \qquad \text{avec une précision garantie de } 10^{-3}.$$

Problème : convergence d'une suite (6 points)

Soit $a > 0$. Le but de cet exercice est d'étudier, en fonction de a, la convergence de la suite définie pour $n \geqslant 0$ par $u_n = \dfrac{a^n\, n!}{n^n}$.

1. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} n\ln(1+\dfrac{1}{n})$.

   Comme $\frac{1}{n} \to_{+\infty} 0$ et $\ln(1+x) \sim_0 x$, nous déduisons par composition : $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$.
   Donc $n\ln(1+\frac{1}{n}) \sim_{+\infty} 1$, ce qui implique que $\lim_{n\to+\infty} n\ln(1+\dfrac{1}{n}) = 1$.

2. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.

   Comme $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{1}{n})}$, nous déduisons de la question précédente que $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.

3. Pour $a \neq \mathrm{e}$, étudier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et en déduire la limite de la suite $(u_n)_n$.

   Calculons :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}\,(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{a^n\,n!/n^n} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = a\frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}.$$

   Nous déduisons que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers $\frac{a}{\mathrm{e}}$.
   Si $a > \mathrm{e}$, alors $\frac{a}{\mathrm{e}} > 1$. Nous déduisons de la règle de d'Alembert que la suite $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$.
   Si $a < \mathrm{e}$, alors $\frac{a}{\mathrm{e}} < 1$. Nous déduisons de la règle de d'Alembert que la suite $(u_n)_n$ converge vers 0.

   On suppose désormais $a = \mathrm{e}$.

4. Déterminer les premiers termes du développement asymptotique de $v_n = 1 - n\ln(1+\frac{1}{n})$ en $+\infty$.

   Nous allons utiliser le DL_2 de ln, cela suffira pour traiter la question suivante : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}_0(x^2)$.
   Par composition, nous déduisons : $\ln(1+\frac{1}{n}) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \mathrm{o}_{+\infty}(\frac{1}{n^2})$.
   Ainsi : $v_n = 1 - n\ln(1+\frac{1}{n}) = 1 - n\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \mathrm{o}_{+\infty}(\frac{1}{n^2})\right) = \dfrac{1}{2n} + \mathrm{o}_{+\infty}(\frac{1}{n})$.

5. En déduire que la suite $(v_n)_n$ est positive à partir d'un certain rang.

   Comme $\frac{1}{2n} > 0$ pour $n > 0$, nous déduisons que v_n est positif au voisinage de $+\infty$: cela signifie que la suite $(v_n)_n$ est positive à partir d'un certain rang.

6. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est croissante à partir d'un certain rang. Que peut-on conclure pour son comportement asymptotique ?

   Reprenons l'expression obtenue à la question 3, avec $a = \mathrm{e}$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\mathrm{e}}{(1+\frac{1}{n})^n}$.
   Alors : $\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n}) = 1 - n\ln(1+\frac{1}{n}) = v_n$.
   D'après la question précédente, nous déduisons que $\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ est positif à partir d'un certain rang. Donc pour n assez grand, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$. Donc la suite $(u_n)_n$ est croissante à partir d'un certain rang.
   Or nous savons qu'une suite croissante n'a que deux comportements asymptotiques possible : elle diverge vers $+\infty$ ou elle converge vers une limite finie. Nous concluons donc que la suite $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$ ou converge (en croissant) vers une limite strictement positive.

7. Rappelons la formule de Stirling : $n! \sim_{+\infty} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.
   Déduire de cette formule la limite de la suite $(u_n)_n$.

   D'après cette formule, nous déduisons : $n! \left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^n \sim_{+\infty} \sqrt{2\pi n}$. Autrement dit, lorsque $a = \mathrm{e}$: $u_n \sim_{+\infty} \sqrt{2\pi n}$.
   Nous en déduisons que la suite $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$, à la même vitesse que la suite $(\sqrt{2\pi n})_n$.