Contrôle 1

Calculatrice et documents sont interdits. Tous les résultats doivent être justifiés.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 **(10 points)**

Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes.
On rappelle le DL_2 suivant en 0 : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathrm{o}_0(x^2)$.

1. Déterminer un équivalent (le plus simple possible) de $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^2 + 5\ln(x)}{x^7 - \mathrm{e}^x + \sin(x)}$ au voisinage de 0.

2. Déterminer un équivalent (le plus simple possible) de la suite : $u_n = n^{\frac{1}{n^2}} - 1$.

3. Donner, en le justifiant, un exemple de fonction g telle que
$$x^2 = \mathrm{o}_{+\infty}(g(x)) \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{o}_{+\infty}(x^3).$$

4. Démontrer que $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}} = \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

5. Déterminer le DL_5 en 0 de $h(x) = \sinh(x)\cos(2x)$.

6. Déterminer le DL_{20} de $\ell(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^8}}$ en 0.

7. La fonction d'erreur de Gauss est définie sur $\mathbf{R}$ par : $\mathrm{erf}(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$.
   Déterminer le DL_5 de erf en 0.

8. Déterminer : $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

Exercice 2 **(10 points)**

L'objectif de cet exercice est d'effectuer une étude fine de la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\varphi(x) = \ln(\mathrm{e}^x - x)$$

Nous admettrons les résultats fournis par l'étude standard (dérivation, tableau de variation).

1. Déterminer des équivalents (les plus simples possibles) de $\varphi(x)$ aux voisinages de 0, $+\infty$ et $-\infty$.

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 de $\varphi(x)$ en 0.

3. Nous admettons que la dérivée cinquième de φ satisfait :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad |\varphi^{(5)}(x)| < 10.$$

   Déduire de la question précédente une estimation de $\varphi(1)$ en donnant la précision associée, garantie par la formule de Taylor-Lagrange.

4. Estimer de la même manière $\varphi(-1)$.

5. Déterminer les deux premiers termes du développement asymptotique de $\varphi(x)$ en $+\infty$.

6. En déduire que le graphe de φ possède une asymptote en $+\infty$ et préciser la position relative de ce graphe par rapport à l'asymptote.
7. Déterminer également un développement asymptotique de φ en $-\infty$ et en déduire la position relative de son graphe par rapport à une courbe classique.

8. Nous admettons que la fonction φ est décroissante sur $\mathbf{R}_-$ et croissante sur $\mathbf{R}_+$. Représenter l'allure du graphe de φ en faisant apparaître toutes les propriétés déterminées dans les questions précédentes.