Contrôle 1

Calculatrice et documents sont interdits. Les douze exercices sont indépendants.
Barème indicatif : 1,5 points pour les neuf premiers, 3 points pour les suivants.
Hormis pour l'exercice 4, tous les résultats doivent être justifiés.

Pour les exercices 10 et 12, on rappelle le DL_2 suivant en 0 : $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \mathrm{o}_0(x^2)$.

1. Donner un équivalent (le plus simple possible) de la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

Comme $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n}$, on reconnaît une fraction rationnelle dont l'équivalent s'obtient en prenant les termes dominants au numérateur et au dénominateur. Ainsi $u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

2. Donner un équivalent en 0 (le plus simple possible) de $\ln(1+\sin^2(x))$.

On sait que $\ln(1+X) \sim_0 X$. Or $\sin^2(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$. Donc par composition à droite : $\ln(1+\sin^2(x)) \sim_0 \sin^2(x)$.
De plus, on sait que $\sin(x) \sim_0 x$, donc par multiplication des équivalents : $\sin^2(x) \sim_0 x^2$.
Conclusion : $\ln(1+\sin^2(x)) \sim_0 x^2$.

3. Soient $a \in \mathbf{R}$ et f, g et h des fonctions telles que $f \sim_a h$ et $g \sim_a h$.
Démontrer que $f + g \sim_a 2h$.

Par définition, $\lim_a \frac{f}{h} = 1$ et $\lim_a \frac{g}{h} = 1$. Or $\frac{f+g}{2h} = \frac{1}{2} \cdot \frac{f}{h} + \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{h}$. On en déduit que $\frac{f+g}{2h}$ converge en a et : $\lim_a \frac{f+g}{2h} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$. Ainsi, $f + g \sim_a 2h$.

4. Ranger, sans justification, les fonctions suivantes de la plus négligeable à la moins négligeable en $+\infty$:

$$\frac{\mathrm{e}^x}{x^3}, \qquad \frac{x^3}{\ln(x)}, \qquad x^3\ln(x), \qquad \frac{\ln(x)\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{x^3}.$$

En utilisant la notation $\ll$ de négligeabilité introduite en cours, on obtient au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{x^3}{\ln(x)} \ll x^3\ln(x) \ll \frac{\ln(x)\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{x^3} \ll \frac{\mathrm{e}^x}{x^3}$$

(Pour s'en convaincre, il suffit de vérifier que chaque quotient d'une fonction par une autre située plus à droite converge vers 0 en $+\infty$.

5. Soient f et g des fonctions telles que $f(x) = \mathrm{o}_0(x^3)$ et $x^2 = \mathrm{o}_0(g(x))$.
Démontrer que $\dfrac{f}{g} = \mathrm{o}_0(x)$.

Par définition : $\lim_0 \frac{f(x)}{x^3} = 0$ et $\lim_0 \frac{x^2}{g(x)} = 0$. Donc, par produit de limites, $\lim_0 \frac{f(x)}{x^3} \cdot \frac{x^2}{g(x)} = 0$. Donc $\lim_0 \frac{f/g}{x} = 0$. Autrement dit, $\frac{f(x)}{g(x)} = \mathrm{o}_0(x)$.

6. Calculer le DL_4 en 0 de $\cos(\sin(x))$.

Après quelques tâtonnements, on comprend qu'on aura besoin du DL_3 de sin composé avec le DL_4 de cos.
On a $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)$ et $\cos(X) = 1 - \frac{X^2}{2} + \frac{X^4}{24} + o(X^4)$. Composons avec $X = \sin(x)$ (qui converge bien vers 0 en quand $x \to 0$) :

$$\begin{aligned}
\cos(\sin(x)) &= 1 - \frac{\sin^2(x)}{2} + \frac{\sin^4(x)}{24} + o_0(\sin^4(x)) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right)^4 + o_0(x^4) \\
&= 1 - \frac{1}{2}(x^2 - \tfrac{1}{3}x^4) + \frac{1}{24}x^4 + o_0(x^4) \\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o_0(x^4)
\end{aligned}$$

Remarque : il faut bien être certain de n'avoir oublié aucun terme ! L'ordre 3 suffit pour sin car il n'y a pas de terme d'ordre 1 dans le DL de cos. L'ordre 4 est bien nécessaire pour le DL de cos, sans quoi on rate un élément d'ordre 4 dans le résultat final.

7. Calculer le DL_2 en 0 de $\dfrac{\sin(x)}{\ln(1+x)}$.

L'analyse des deux DL en jeu permet de comprendre qu'il faudra utiliser des DL_3 (et non 2) pour aboutir au résultat. Nous utiliserons les DL suivants : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ et $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$. Ainsi :

$$\frac{\sin(x)}{\ln(1+x)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \frac{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}.$$

On le voit, la simplification par x nous a fait perdre un ordre, les DL_3 étaient nécessaire pour arriver finalement à un DL_2. Continuons en reconnaissant $\frac{1}{1+X}$ avec $X = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$ qui converge bien vers 0 en 0 :

$$\frac{1}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = 1 - \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)^2 + o(x^2) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2).$$

(L'ordre 2 suffit ici pour notre objectif.) Ainsi

$$\frac{\sin(x)}{\ln(1+x)} = \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + o(x^2).$$

8. Déterminer $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x^2} - \cosh(2x)}{x^2 \sin^2(x)}$.

L'analyse des termes conduit à utiliser des DL à l'ordre 4 (on remarque notamment que le dénominateur est équivalent à x^4, il faut pouvoir comparer le numérateur avec ce terme). Par composition avec les DL standards : $e^{2x^2} = 1 + (2x^2) + \frac{1}{2}(2x^2)^2 + o(x^4) = 1 + 2x^2 + 2x^4 + o(x^4)$.

$\cosh(2x) = 1 + \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{24}(2x)^4 + \mathrm{o}(x^4) = 1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$.
Enfin, $\sin(x) \sim_0 x$, donc $x^2\sin^2(x) \sim_0 x^4$, donc $x^2\sin^2(x) = x^4 + \mathrm{o}(x^4)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^{2x^2} - \cosh(2x)}{x^2\sin^2(x)} &= \frac{(1 + 2x^2 + 2x^4 + \mathrm{o}(x^4)) - (1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \mathrm{o}(x^4))}{x^4 + \mathrm{o}(x^4)} \\ &= \frac{\frac{4}{3}x^4 + \mathrm{o}(x^4)}{x^4 + \mathrm{o}(x^4)} \\ &= \frac{\frac{4}{3} + \mathrm{o}(1)}{1 + \mathrm{o}(1)}\end{aligned}$$

Or $\mathrm{o}(1) \to 0$ lorsque $x \to 0$. On en déduit que le quotient converge et

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x^2} - \cosh(2x)}{x^2\sin^2(x)} = \frac{4}{3}.$$

9. À l'aide du DL de $\dfrac{1}{1+x}$, estimer la valeur de $\dfrac{1}{1{,}09}$ avec une précision garantie de 10^{-3}.

Appliquons le théorème de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour cette fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$: il existe $c \in [0, x]$ tel que

$$f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

On souhaite estimer la valeur de $f(0{,}09)$ par l'expression correspondante de degré n, avec un reste $(-1)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$ devant être inférieur à 10^{-3} en valeur absolue.

La dérivée $(n+1)$-ème de f est donnée par $f^{(n+1)}(c) = (-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{(1+c)^{n+2}}$.
Ainsi $(-1)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+2}}$. Avec $x = 0{,}09$ et $c \in [1; 1{,}09]$, on peut majorer : $\left|\frac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+2}}\right| \leqslant (0{,}09)^{n+1}$.
Pour $n = 1$, $(0{,}09)^{n+1} = 0{,}0081 > 10^{-3}$, mais pour $n = 2$, $(0{,}09)^{n+1} < (0{,}1)^3 = 10^{-3}$.

Conclusion : $\dfrac{1}{1{,}09} \approx 1 - 0{,}09 + (0{,}09)^2 = 0{,}91 + 0,0081 = 0{,}9181$ avec une précision garantie de 10^{-3}.

10. Soient $r > 0$ et a des réels. On pose $f(x) = a + \sqrt{r^2 - x^2}$.

(a) Déterminer le DL_2 de f en 0.

On se ramène au DL de $\sqrt{1+X}$ avec $X = -\frac{x^2}{r^2}$ qui converge bien vers 0 en 0.

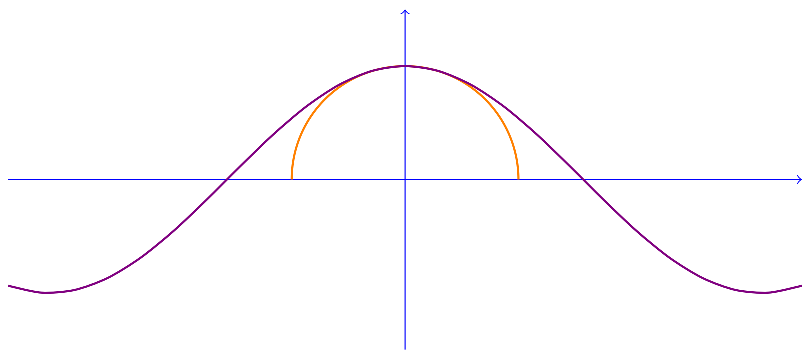
$$\begin{aligned}f(x) &= a + \sqrt{r^2 - x^2} \\ &= a + r\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} \\ &= a + r(1 + \tfrac{1}{2}(-\frac{x^2}{r^2}) + \mathrm{o}(x^2)) \\ &= a + r - \frac{x^2}{2r} + \mathrm{o}(x^2)\end{aligned}$$

(b) Pour quelles valeurs de a et r retrouve-t-on le DL_2 de cos en 0 ?

Le DL_2 de cos en 0 est donné par $\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^2)$. On retrouve le DL précédent si $r = 1$ et $a = 0$.

(c) Géométriquement, par quelle courbe avons-nous ainsi approché le graphe de cos au voisinage de 0 ?

D'après ce qui précède, $\cos(x) = \sqrt{1-x^2} + \mathrm{o}(x^2)$. Autrement dit, la fonction f est une bonne approximation de cos au voisinage de 0. Or le graphe de f est le demi-cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 : cette courbe approche « à l'ordre 2 »le graphe de cos en 0.



Remarque : l'approximation locale d'une courbe par un cercle permet de définir le concept de courbure d'une courbe. Sur notre exemple, le graphe de cos « tourne »au voisinage de 0 comme un cercle de rayon 1. On dit que le rayon de la courbe en 0 vaut 1.

11. On considère la fonction y solution de l'équation différentielle $y'(x) = xy(x)+y^2(x)$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.

(a) En déduire la valeur de $y'(0)$ puis celle de $y''(0)$.

D'après l'équation : $y'(0) = 0 \cdot y(0) + (y(0))^2 = 1$.
Toujours d'après l'équation, $y''(x) = y(x) + xy'(x) + 2y(x)y'(x)$. En $x = 0$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$; on obtient ainsi $y''(0) = 3$.

(b) Donner le DL_2 en 0 de y.

La solution y est deux fois dérivable en 0 ; elle est même de classe $C^{+\infty}$ (il suffit de continuer le raisonnement de la question précédente). D'après la formule de Taylor-Young : $y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 + \mathrm{o}_0(x^2)$. Donc :

$$y(x) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \mathrm{o}_0(x^2).$$

12. On pose $g(x) = \sqrt{x + x^2}$.

(a) Déterminer les trois premiers termes du développement asymptotique de g en 0.

On se ramène au DL de $\sqrt{1 + x}$ en 0 :

$$\begin{aligned}\sqrt{x + x^2} &= \sqrt{x}\sqrt{x + 1}\\ &= \sqrt{x}\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathrm{o}_0(x^2)\right)\\ &= \sqrt{x} + \frac{x\sqrt{x}}{2} - \frac{x^2\sqrt{x}}{8} + \mathrm{o}_0(x^2\sqrt{x})\end{aligned}$$

(b) En déduire aussi le développement asymptotique de g en $+\infty$.

On se ramène encore au DL en 0 de $\sqrt{1+X}$ avec $X = \frac{1}{x}$ qui converge bien vers 0 lorsque X tend vers $+\infty$.

$$\begin{aligned}\sqrt{x+x^2} &= x\sqrt{1+\tfrac{1}{x}} \\ &= x(1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+\mathrm{o}_\infty(\frac{1}{x^2}) \\ &= x+\frac{1}{2}-\frac{1}{8x}+\mathrm{o}_\infty(\frac{1}{x})\end{aligned}$$

(c) Que peut-on en déduire pour le graphe de g ?

En $+\infty$, on déduit que g possède une asymptote d'équation $y = x + \frac{1}{2}$, l'écart entre g et $x + \frac{1}{2}$ convergeant vers 0. De plus, cet écart est négatif au voisinage de $+\infty$ (car $-\frac{1}{8x}$ est négatif) donc le graphe de g reste sous l'asymptote en l'infini.

En 0, la fonction g est équivalente à la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$. D'après le développement asymptotique, son graphe est situé au-dessus de celui de $\sqrt{}$ près de 0 puisque le second terme du développement est positif.