

CONTRÔLE FINAL

Calculatrice et documents sont interdits.

Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.

Le barème est donné à titre indicatif.

La qualité de la rédaction sera fortement prise en compte dans la notation.

Problème : commutant d'une matrice

Rappel des notations : pour $n \geq 1$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels et on note $\text{GL}_n(\mathbf{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices inversibles ; c'est un groupe pour la multiplication matricielle, d'élément neutre la matrice identité I_n .

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On appelle **commutant** de M l'ensemble $\mathcal{C}_M$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui commutent avec M :

$$\mathcal{C}_M = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid AM = MA\}.$$

1. Des exemples

6 pts

- (a) Quel est le commutant $\mathcal{C}_{I_n}$ de la matrice identité ?
- (b) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ qui commutent avec M .
- (c) Soit $D = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$ une matrice diagonale avec $r \neq s$. Montrer que le commutant $\mathcal{C}_D$ de D est l'ensemble des matrices diagonales.
- (d) Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A = 2N^2 - N$, puis sa matrice inverse A^{-1} .
- (e) Justifier que A commute avec N et vérifier que A^{-1} commute également avec N .

2. Structure algébrique

5 pts

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

- (a) On considère l'application $f_M : A \mapsto AM - MA$. Montrer que f_M est un morphisme de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), +)$ vers $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), +)$.
- (b) Déterminer son noyau et en déduire que $\mathcal{C}_M$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), +)$.
- (c) Soient A et B des matrices qui commutent avec M . Montrer alors que AB commute également avec M .
- (d) Soit A une matrice commutant avec M . On suppose de plus que A est inversible. Montrer alors que A^{-1} commute avec M .
- (e) En déduire que l'ensemble $\mathcal{C}_M^{\text{inv}} = \{A \in \text{GL}_n(\mathbf{R}) \mid AM = MA\}$ est un sous-groupe de $(\text{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$.

3. Co-diagonalisation

4 pts

Soient M et A dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et $P \in GL_2(\mathbf{R})$.

- (a) Montrer que si A et M commutent, alors PAP^{-1} et PMP^{-1} commutent également.

Nous supposons que M est **diagonalisable** : il existe $P \in GL_2(\mathbf{R})$ et $D = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$ tels que $PMP^{-1} = D$.

- (b) Montrer que si $r = s$, alors $M = D$.
- (c) Montrer, à l'aide de la question 1-c, que si $r \neq s$, alors toute matrice A commutant avec M est diagonalisable à l'aide de la même matrice P .

On dit que M et A sont co-diagonalisables. Nous avons ainsi montré que toutes les matrices du commutant d'une telle matrice diagonalisable sont co-diagonalisables.

4. Matrices à coefficients dans $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$

9 pts

On considère désormais l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ des 81 matrices de taille 2 à coefficients dans $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$. Son sous-ensemble $GL_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ des matrices inversibles contient 48 éléments.

La définition de commutant et toutes les propriétés étudiées dans les parties précédentes restent valables dans ce contexte. Notamment, le commutant d'une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ est encore un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}), +)$. Et l'ensemble des matrices inversibles qui commutent avec M est encore un sous-groupe de $(GL_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}), \times)$.

- (a) Donner la liste des matrices commutant avec la matrice $\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$.
- (b) Parmi elles, lesquelles sont inversibles ? *On pourra utiliser le critère vu en TD : une matrice $\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c} \neq \bar{0}$.*
- (c) Ces deux listes respectent-elles le théorème de Lagrange ?
- (d) Combien y a-t-il de matrices diagonales dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$?
- (e) Soit $M \notin \{0_2, I_2, 2I_2\}$ une matrice diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$. Montrer, à l'aide du résultat de la question 3-c que son commutant contient 9 éléments.

On admet pour la suite que ce résultat est également vrai pour les matrices non diagonalisables : hormis pour les matrices 0_2 , I_2 et $2I_2$, le commutant de toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ est de cardinal 9.

- (f) Soit M une matrice inversible de $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$. Justifier qu'il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $M^k = I_2$.
- (g) Soit $M_1 = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix}$. Calculer les puissances de M_1 et déterminer son ordre dans $GL_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$.
- (h) Trouver les autres matrices qui commutent avec M_1 et en déduire le commutant de M_1 .
- (i) Déterminer de même tous les éléments du commutant de $M_2 = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix}$.