Contrôle final

Calculatrice et documents sont interdits.
Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.
Le barème est donné à titre indicatif.
La qualité de la rédaction sera fortement prise en compte dans la notation.

Problème : commutant d'une matrice

Rappel des notations : pour $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels et on note $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices inversibles ; c'est un groupe pour la multiplication matricielle, d'élément neutre la matrice identité I_n.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On appelle **commutant** de M l'ensemble $\mathcal{C}_M$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui commutent avec M :

$$\mathcal{C}_M = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid AM = MA\}.$$

1. **Des exemples** **6 pts**

   (a) Quel est le commutant $\mathcal{C}_{I_n}$ de la matrice identité ?

   Toute matrice commute avec la matrice identité : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}),\ AI_n = I_nA = A$. Donc $\mathcal{C}_{I_n} = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

   (b) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ qui commutent avec M.

   Notons $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors $AN = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$ et $NA = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$. Donc $AN = NA$ ssi $b = c$ et $a = d$. Le commutant de N est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

   (c) Soit $D = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$ une matrice diagonale avec $r \neq s$. Montrer que le commutant $\mathcal{C}_D$ de D est l'ensemble des matrices diagonales.

   Reprenons la matrice A précédente. Alors $AD = \begin{pmatrix} ar & bs \\ cr & ds \end{pmatrix}$ et $DA = \begin{pmatrix} ar & br \\ cs & ds \end{pmatrix}$. Donc $AD = DA$ ssi $bs = br$ et $cr = cs$. Or $r \neq s$ par hypothèse, donc $b = c = 0$. Ainsi le commutant de D est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, *i.e.* l'ensemble des matrices diagonales.

   (d) Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A = 2N^2 - N$, puis sa matrice inverse A^{-1}.

$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

À l'aide de la méthode du pivot de Gauss, on montre que A est inversible et on obtient sa matrice inverse :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(e) Justifier que A commute avec N et vérifier que A^{-1} commute également avec N.

La matrice A commute naturellement avec N car c'est une combinaison polynomiale de N : $AN = (2N^2 - N)N = 2N^3 - N^2 = N(2N^2 - N) = NA$.
Pour A^{-1}, on calcule $A^{-1}N$ et NA^{-1}, et on obtient dans les deux cas la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc $A^{-1}N = NA^{-1}$.

2. **Structure algébrique** **5 pts**

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

(a) On considère l'application $f_M : A \mapsto AM - MA$. Montrer que f_M est un morphisme de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), +)$ vers $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), +)$.

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Alors

$$f_N(A + B) = (A + B)M - M(A + B) = AM + BM - MA - MB$$

$$= (AM - MA) + (BM - MB) = f_M(A) + f_M(B).$$

Donc f_M est bien un endomorphisme de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), +)$.

(b) Déterminer son noyau et en déduire que $\mathcal{C}_M$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), +)$.

Par définition, le noyau de f_M est l'ensemble des matrices A telles que $f_M(A) = 0$, *i.e.* $AM = MA$. Autrement dit, $\mathrm{Ker}(f_M) = \mathcal{C}_M$.
Or le noyau d'un morphisme est un sous-groupe, donc $\mathcal{C}_M$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), +)$.

(c) Soient A et B des matrices qui commutent avec M. Montrer alors que AB commute également avec M.

Par hypothèses, $AM = MA$ et $BM = MB$. Alors :

$$ABM = A(BM) = A(MB) = (AM)B = (MA)B = MAB.$$

Donc AB commute avec M.

(d) Soit A une matrice commutant avec M. On suppose de plus que A est inversible. Montrer alors que A^{-1} commute avec M.

Par hypothèse $AM = MA$. De plus, A est inversible ; nous pouvons donc multiplier à gauche et à droite par sa matrice inverse : $A^{-1}AMA^{-1} = A^{-1}MAA^{-1}$, donc $MA^{-1} = A^{-1}M$. Donc A^{-1} commute avec M.

(e) En déduire que l'ensemble $\mathcal{C}_M^{\mathrm{inv}} = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \mid AM = MA\}$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$.

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{C}_M^{\mathrm{inv}}$. Ce sont donc deux matrices inversibles qui commutent avec M. Leur produit AB est également une matrice inversible, et d'après la question c, elle commute aussi avec M. Donc $AB \in \mathcal{C}_M^{\mathrm{inv}}$.

La matrice identité I_n est une matrice inversible qui commute avec M, donc $I_n \in \mathcal{C}_M^{\mathrm{inv}}$.

Enfin, soit $A \in \mathcal{C}_M^{\mathrm{inv}}$. Alors sa matrice inverse A^{-1} est également une matrice inversible et d'après la question d, elle commute aussi avec M. Donc $A^{-1} \in \mathcal{C}_M^{\mathrm{inv}}$.

Conclusion : $\mathcal{C}_M^{\mathrm{inv}}$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$.

3. **Co-diagonalisation** **4 pts**

Soient M et A dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et $P \in GL_2(\mathbf{R})$.

(a) Montrer que si A et M commutent, alors PAP^{-1} et PMP^{-1} commutent également.

Par hypothèse, $AM = MA$, donc $PAP^{-1}PMP^{-1} = PAMP^{-1} = PMAP^{-1} = PMP^{-1}PAP^{-1}$. Donc PAP^{-1} et PMP^{-1} commutent bien.

Nous supposons que M est **diagonalisable** : il existe $P \in GL_2(\mathbf{R})$ et $D = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$ tels que $PMP^{-1} = D$.

(b) Montrer que si $r = s$, alors $M = D$.

Si $r = s$, alors $D = rI_2$. Donc toute matrice commute avec D, en particulier P. Or $M = P^{-1}DP$, donc $M = P^{-1}PD = D$.

(c) Montrer, à l'aide de la question 1-c, que si $r \neq s$, alors toute matrice A commutant avec M est diagonalisable à l'aide de la même matrice P.
On dit que M et A sont co-diagonalisables. Nous avons ainsi montré que toutes les matrices du commutant d'une telle matrice diagonalisable sont co-diagonalisables.

D'après la question a, PAP^{-1} commute avec $PMP^{-1} = D$. Or D est la matrice étudiée dans la question 1-c (avec la même hypothèse $r \neq s$). Nous avons montré que les seules matrices commutant avec D sont les matrices diagonales. Donc PAP^{-1} est une matrice diagonale. Ainsi A est bien diagonalisable avec la même matrice P que M.

4. **Matrices à coefficients dans $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$** **9 pts**

On considère désormais l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ des 81 matrices de taille 2 à coefficients dans $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$. Son sous-ensemble $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ des matrices inversibles contient 48 éléments.

La définition de commutant et toutes les propriétés étudiées dans les parties précédentes restent valables dans ce contexte. Notamment, le commutant d'une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ est encore un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}), +)$. Et l'ensemble des matrices inversibles qui commutent avec M est encore un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}), \times)$.

(a) Donner la liste des matrices commutant avec la matrice $\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$.

Le résultat obtenu à la question 1-b reste valable dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$: les matrices commutant avec $\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$ sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$. Il y en a 9 :

$$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix}.$$

(b) Parmi elles, lesquelles sont inversibles ? *On pourra utiliser le critère vu en TD : une matrice $\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c} \neq \bar{0}$.*

Les seules matrices ci-dessus ayant un déterminant non nul modulo 3 sont les suivantes :

$$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{0} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix}.$$

(c) Ces deux listes respectent-elles le théorème de Lagrange ?

D'après les résultats de la partie 2, la première liste forme un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}), +)$. Elle contient 9 éléments et 9 est bien un diviseur de 81.
De même, la seconde liste forme un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}), \times)$. Elle contient 4 éléments et 4 divise bien 48.
La conclusion du théorème de Lagrange est bien satisfaite dans ces deux cas.

(d) Combien y a-t-il de matrices diagonales dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$?

Il y en a 9 (en reprenant les notations plus haut, on a 3 valeurs possibles pour $\bar{r}$ et 3 pour $\bar{s}$).

(e) Soit $M \notin \{0_2, I_2, 2I_2\}$ une matrice diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$. Montrer, à l'aide du résultat de la question 3-c que son commutant contient 9 éléments.

Notons P la matrice permettant de diagonaliser M : $PMP^{-1} = D$ est diagonale. On a montré que si A commute avec M, alors PAP^{-1} est une matrice diagonale. Réciproquement, toute matrice diagonale D' commute avec D et on en déduit que $A = P^{-1}D'P$ commute avec $M = P^{-1}DP$.
Ainsi, les matrices commutant avec M sont les matrices de la forme $A = P^{-1}D'P$ où D' est une matrice diagonale. Or il y a 9 matrices diagonales différentes dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$, et on obtient ainsi 9 matrices A différentes commutant avec M. Donc $\mathcal{C}_M$ contient 9 éléments.

On admet pour la suite que ce résultat est également vrai pour les matrices non diagonalisables : hormis pour les matrices 0_2, I_2 et $2I_2$, le commutant de toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ est de cardinal 9.

(f) Soit M une matrice inversible de $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$.
Justifier qu'il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $M^k = I_2$.

C'est un résultat du cours sur les groupes finis. Si la matrice M est inversible, elle appartient au groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ de cardinal fini 48. Alors il existe une puissance de M égale à l'élément neutre de ce groupe, c'est-à-dire la matrice I_2.

(g) Soit $M_1 = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix}$.
Calculer les puissances de M_1 et déterminer son ordre dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$.

Calculons les puissances de M_1 (modulo 3) jusqu'à obtenir I_2 :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix}, \quad M_1^2 = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}, \quad M_1^3 = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{2} \end{pmatrix}, \quad M_1^4 = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix}$$

$$M_1^5 = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{2} \end{pmatrix}, \quad M_1^6 = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{0} \end{pmatrix}, \quad M_1^7 = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix}, \quad M_1^8 = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

Donc la matrice M_1 est d'ordre 8 dans $(\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}), \times)$ (et 8 divise bien 48).

(h) Trouver les autres matrices qui commutent avec M_1 et en déduire le commutant de M_1.

Les puissances de M_1 commutent naturellement avec M_1. Nous avons admis que le commutant de M_1 est de cardinal 9. Nous avons déjà trouvé 8 matrices commutant avec M_1, il en manque une qui est simplement la matrice nulle.

(i) Déterminer de même tous les éléments du commutant de $M_2 = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix}$.

Calculons les puissances de M_2 :

$$M_2 = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix}, \qquad M_2^2 = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{0} \end{pmatrix}, \qquad M_2^3 = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix}$$

$$M_2^4 = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{2} \end{pmatrix}, \qquad M_2^5 = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}, \qquad M_2^6 = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

Elle est d'ordre 6 (et 6 divise bien 48). Le commutant de M_2 étant de cardinal 9, il nous manque 3 matrices. La matrice nulle commute évidemment avec M_2. Pour trouver les deux dernières, il faut tâtonner un peu. Une idée possible est de se souvenir que le commutant est un sous-groupe pour l'addition. Comme M_2 et I_2 lui appartiennent, leur somme lui appartient également.

Donc $M_2 + I_2 = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_{M_2}$. La dernière matrice manquante est $2M_2 + 2I_2 = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$.