Contrôle final

Calculatrice et documents sont interdits.
Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.
Le barème est donné à titre indicatif.
La qualité de la rédaction sera fortement prise en compte dans la notation.

Rappel des notations : $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille 3 à coefficients complexes. On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$. On note enfin $\mathrm{GL}_3(\mathbf{C})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ des matrices inversibles ; c'est un groupe pour la multiplication matricielle, d'élément neutre I_3.

Soit $M = (m_{ij})_{i,j\leqslant 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{C})$.

- On note $\overline{M}$ la **matrice conjuguée** de M dont les coefficients sont les nombres conjugués des coefficients de M : $\overline{M} = (\overline{m_{ij}})_{i,j\leqslant 3}$.
- On note ${}^tM$ la **transposée** de la matrice M.
  On rappelle que la transposée vérifie la propriété : ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.
- On dit que M est **unitaire** si ${}^t\overline{M} \times M = I_3$.
  On note enfin $\mathcal{U}_3$ leur ensemble :
  $$\mathcal{U}_3 = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{C}) \mid {}^t\overline{M}M = I_3\}.$$

Le but de ce problème est d'établir quelques propriétés des matrices unitaires et de les utiliser pour décrire les isométries d'un tétraèdre régulier.

1. **Un premier exemple** **3 pts**

   Soit $Q = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 2 \\ -\sqrt{2} & -\mathrm{i}\sqrt{6} & 2 \\ -\sqrt{2} & \mathrm{i}\sqrt{6} & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Appliquer l'algorithme du pivot de Gauss pour déterminer la matrice inverse de Q.

   $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2\sqrt{2} & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & -\mathrm{i}\sqrt{6} & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & \mathrm{i}\sqrt{6} & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad L_2 \leftarrow L_2 + \tfrac{1}{2}L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 + \tfrac{1}{2}L_1$$

   $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2\sqrt{2} & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\sqrt{6} & 3 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i}\sqrt{6} & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2\sqrt{2} & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\sqrt{6} & 3 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad L_1 \leftarrow 6L_1 - L_3,\ \ L_2 \leftarrow 2L_2 - L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 6\sqrt{2} & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2\mathrm{i}\sqrt{6} & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad L_1 \leftarrow \tfrac{1}{6\sqrt{2}}L_1, \quad L_2 \leftarrow -\tfrac{1}{2\mathrm{i}\sqrt{6}}L_2, \quad L_3 \leftarrow \tfrac{1}{6}L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{12} & -\frac{\sqrt{2}}{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\mathrm{i}\sqrt{6}}{12} & -\frac{\mathrm{i}\sqrt{6}}{12} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right]$$

On en déduit que Q est inversible et son inverse est :

$$Q^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & \mathrm{i}\sqrt{6} & -\mathrm{i}\sqrt{6} \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Quelle relation y a-t-il entre Q^{-1} et ${}^t\overline{Q}$? En déduire que la matrice $P = \frac{1}{\sqrt{12}}Q$ est une matrice unitaire.

On remarque que $Q^{-1} = \frac{1}{12}{}^t\overline{Q}$. Posons $P = \frac{1}{\sqrt{12}}Q$. Alors :

$${}^t\overline{P}P = \left(\frac{1}{\sqrt{12}}{}^t\overline{Q}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{12}}Q\right) = \frac{1}{12}{}^t\overline{Q}Q = Q^{-1}Q = I_3.$$

Donc P est une matrice unitaire.

2. **Propriétés des matrices unitaires** **7 pts**

(a) *Matrice conjuguée d'un produit*

i. Soient $A = (a_{ij})_{i,j\leqslant 3}$ et $B = (b_{ij})_{i,j\leqslant 3}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$.
Rappeler l'expression des coefficients c_{ij} du produit $C = AB$.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}b_{kj}.$$

ii. Démontrer que $\overline{A\times B} = \overline{A}\times\overline{B}$.

On rappelle que le conjugué d'un produit (respectivement d'une somme) de nombres complexes est égal au produit (respectivement à la somme) des conjugués de ces nombres.
Les coefficients de la matrice $\overline{A\times B}$ sont alors donnés par

$$\overline{c_{ij}} = \overline{\sum_{k=1}^{3} a_{ik}b_{kj}} = \sum_{k=1}^{3} \overline{a_{ik}b_{kj}} = \sum_{k=1}^{3} \overline{a_{ik}} \times \overline{b_{kj}}.$$

On reconnaît la définition des coefficients du produit $\overline{A}\times\overline{B}$.

(b) *Le groupe* $\mathcal{U}_3$

i. Montrer que si M est une matrice unitaire, alors elle est inversible dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$.

Soit M une matrice unitaire. Alors ${}^t\overline{M}M = I_3$. On en déduit, par définition, que M est inversible d'inverse ${}^t\overline{M}$.

ii. Montrer que si M et N sont des matrices unitaires, alors leur produit MN est également une matrice unitaire.

Soient M et N des matrices unitaires. Donc ${}^t\overline{M}M = I_3$ et ${}^t\overline{N}N = I_3$. Alors, en utilisant le résultat de la question 2-b et la propriété de la transposée :

$${}^t(\overline{MN})(MN) = {}^t(\overline{M}\times\overline{N})(MN) = {}^t\overline{N}{}^t\overline{M}MN = {}^t\overline{N}I_3N = {}^t\overline{N}N = I_3.$$

iii. Montrer que $\mathcal{U}_3$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_3(\mathbf{C}), \times)$.

- Nous venons de montrer que $\mathcal{U}_3$ est stable par multiplication.
- La matrice identité vérifie : ${}^t\overline{I_3}I_3 = I_3I_3 = I_3$. Donc $I_3 \in \mathcal{U}_3$.
- Soit $M \in \mathcal{U}_3$. Nous avons montré que M est inversible et $M^{-1} = {}^t\overline{M}$. Alors

$${}^t\overline{M^{-1}}M^{-1} = {}^t{}^t\overline{\overline{M}}{}^t\overline{M} = {}^t({}^tM){}^t\overline{M} = M{}^t\overline{M} = I_3.$$

  Ainsi M^{-1} est une matrice unitaire, donc $M^{-1} \in \mathcal{U}_3$.

Nous pouvons conclure que $\mathcal{U}_3$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_3(\mathbf{C}), \times)$.

(c) *Matrices unitaires et isométries*

Soit $X = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$ un vecteur à coefficients complexes.

On définit sa norme par : $\|X\| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2}$.
Si X est à coefficients réels, on retrouve bien sa norme euclidienne.

i. Vérifier que $\|X\| = \sqrt{{}^t\overline{X}X}$.

$$ {}^t\overline{X}X = \begin{pmatrix}\overline{z_1} & \overline{z_2} & \overline{z_3}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\overline{z_1}z_1 + \overline{z_2}z_2 + \overline{z_3}z_3\end{pmatrix} $$

On rappelle que pour un nombre complexe z, $\overline{z}z = |z|^2$. Ainsi ${}^t\overline{X}X$ est une matrice de taille 1, dont l'unique coefficient est égal à $|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2$. On peut l'assimiler à un nombre réel et reconnaître la norme de X : $\sqrt{{}^t\overline{X}X} = \|X\|$.

ii. Soit M une matrice unitaire. Montrer que $\|MX\| = \|X\|$.
Cette dernière propriété permet de justifier que l'application $X \mapsto MX$ est une isométrie.

D'après la propriété précédente :

$$ \|MX\| = \sqrt{{}^t\overline{MX}MX} = \sqrt{{}^t\overline{X}\,{}^t\overline{M}MX}. $$

Or M est unitaire, donc

$$ \|MX\| = \sqrt{{}^t\overline{X}I_3X} = \sqrt{{}^t\overline{X}X} = \|X\|. $$

Remarque : la distance entre deux points dans l'espace (réel ou complexe) peut se définir avec cette norme. La distance entre deux points X et Y est en effet égale à : $\mathrm{dist}(X, Y) = \|X - Y\|$. La propriété ci-dessus permet alors bien de montrer que M définit une isométrie :

$$ \|MX - MY\| = \|M(X - Y)\| = \|X - Y\|. $$

Ainsi les images MX et MY sont bien à la même distance que le sont les points X et Y.

3. **Second exemple** **3 pts**

Considérons la matrice

$$ A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} $$

On admet l'égalité suivante : $A = P^{-1}DP$

où P est la matrice unitaire de la partie 1 et D est la matrice diagonale $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\frac{2i\pi}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}} \end{bmatrix}$.

(a) Vérifier que D est une matrice unitaire.

Rappelons la règle de conjugaison suivante : $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$. Calculons :

$$ {}^t\overline{D}D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} \end{bmatrix} = I_3. $$

Donc D est bien une matrice unitaire.

(b) En déduire que A est une matrice unitaire.

En utilisant le résultat de la question 2-b et la propriété de la transposée :

$$ {}^t\overline{A}A = {}^t\overline{P^{-1}DP}P^{-1}DP = {}^t\overline{P}{}^t\overline{D}{}^t\overline{P^{-1}}P^{-1}DP. $$

Or P est unitaire, donc $P^{-1} = {}^t\overline{P}$ et ${}^t\overline{P^{-1}} = P$. On peut ainsi simplifier l'expression ci-dessus et obtenir :

$$ {}^t\overline{A}A = {}^t\overline{P}{}^t\overline{D}DP = {}^t\overline{P}P = I_3. $$

Ainsi A est une matrice unitaire.

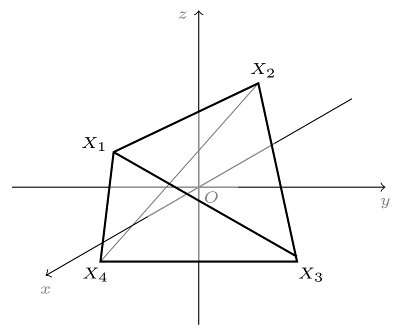
(c) Déduire également de l'égalité l'expression de la matrice A^3.

De même :

$$ A^3 = P^{-1}DPP^{-1}DPP^{-1}DP = P^{-1}D^3P. $$

Or comme $(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}})^3 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 1$ et de même $(\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}})^3 = 1$, on déduit que $D^3 = I_3$. Il suit que $A^3 = P^{-1}P = I_3$.

4. **Isométries du tétraèdre** **12 pts**



On considère le tétraèdre régulier de centre O représenté ci-contre. Ses sommets sont les points de coordonnées

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, X_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

On s'intéresse aux isométries laissant invariant ce tétraèdre. On admet que de telles isométries permutent nécessairement les sommets du tétraèdre. On peut ainsi associer à chacune de ces isométries une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ (en utilisant la numérotation des sommets). Algébriquement, cette correspondance définit un isomorphisme entre le groupe des isométries du tétraèdre et un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$ pour la composition.

Les isométries du tétraèdre peuvent s'écrire matriciellement. Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, nous noterons φ_M l'application $X \mapsto MX$. D'après la question 2-c, si M est une matrice unitaire, alors l'application φ_M est une isométrie.

Reprenons la matrice A de la partie 3. Nous admettons que son application φ_A associée est une isométrie du tétraèdre.

(a) Calculer AX_1, AX_2, AX_3 et AX_4.

On calcule ces produits et on trouve $AX_1 = X_1$, $AX_2 = X_3$, $AX_3 = X_4$ et $AX_4 = X_2$.

(b) Comment agit l'isométrie φ_A sur les sommets du tétraèdre ? Quelle est cette isométrie : une rotation autour d'un axe, une symétrie orthogonale par rapport à un plan ou autre chose ?

L'application φ_A laisse le sommet X_1 invariant et permute les sommets X_2, X_3 et X_4 de manière circulaire dans cet ordre. La rotation d'angle $2\pi/3$ autour de l'axe OX_1 réalise cela. On admet qu'il n'y a pas d'autre isométrie réalisant cela.

(c) Donner la permutation σ de $\mathfrak{S}_4$ correspondant à φ_A. Quel est son ordre ? Retrouver ainsi le résultat de la question 3-c.

On associe à φ_A la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Elle est d'ordre 3 (car $\sigma \circ \sigma \neq \mathrm{id}$ et $\sigma^3 = \sigma \circ \sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$). Cela est équivalent au fait que $\varphi_A \circ \varphi_A \circ \varphi_A = \mathrm{id}$ ou encore que $A^3 = I_3$.

Soit maintenant $A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

La matrice A' est unitaire et son application $\varphi_{A'}$ est une autre isométrie du tétraèdre.

(d) Calculer les images de X_1, X_2, X_3 et X_4 par l'application $\varphi_{A'}$. Quelle est la permutation σ' associée à $\varphi_{A'}$?

On obtient $\varphi_{A'}(X_1) = A'X_1 = X_3$, $\varphi_{A'}(X_2) = X_4$, $\varphi_{A'}(X_3) = X_2$ et $\varphi_{A'}(X_4) = X_1$. La permutation associée est $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(e) Décomposer cette permutation σ' en une composée de transpositions.
Si σ' n'a pas été trouvée, on pourra répondre à la question avec $\sigma'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

On applique l'algorithme de décomposition en transpositions :

$$\tau_{14}\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tau_{23}\tau_{14}\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tau_{12}\tau_{23}\tau_{14}\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{id}.$$

On en déduit que $\sigma' = \tau_{14}\tau_{23}\tau_{12}$.

(f) Donner sans justification l'isométrie (rotation autour d'un axe, symétrie orthogonale par rapport à un plan, autre) de $\mathbf{R}^3$ qui échange les sommets X_1 et X_2 et laisse invariants les sommets X_3 et X_4.

La symétrie orthogonale par rapport au plan passant par les points O, X_3 et X_4 réalise la permutation τ_{12} demandée. Ce plan est simplement le plan vertical Oyz et la symétrie est donc la symétrie par rapport au plan Oyz.

(g) Généraliser afin de justifier que pour chaque transposition τ_{ij} de $\mathfrak{S}_4$, il existe une isométrie du tétraèdre qui lui correspond.

Pour tout couple de sommets distincts (X_i, X_j), la symétrie orthogonale par rapport au plan passant par O et les deux autres sommets du tétraèdre réalise l'échange entre les sommets X_i et X_j et correspond ainsi à la transposition τ_{ij}.

(h) Interpréter ainsi $\varphi_{A'}$ comme une composée de symétries.

D'après la question e, L'isométrie $\varphi_{A'}$ est associée à la composée $\tau_{14}\tau_{23}\tau_{12}$. Chaque transposition correspond à une symétrie de $\mathbf{R}^3$, donc $\varphi_{A'}$ est la composée de ces symétries. Si on note P_1 le plan passant par O, X_2 et X_3 et P_2 le plan passant par O, X_1 et X_4, alors $\varphi_{A'}$ est la composée, dans cet ordre, des symétries par rapport aux plans Oyz, P_1 et P_2.

(i) Justifier que toute permutation de $\mathfrak{S}_4$ correspond à une isométrie du tétraèdre. Combien y a-t-il d'isométries du tétraèdre ?

On sait que toute permutation de $\mathfrak{S}_4$ se décompose en une composée de transpositions. Or chaque permutation correspond à une symétrie du tétraèdre. Ainsi toute permutation correspond à une composée de telles symétries et correspond donc à une isométrie du tétraèdre. En admettant que la correspondance entre les isométries du tétraèdre et les permutations de $\mathfrak{S}_4$ est bijective, on déduit que le groupe des isométries est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$ et contient donc 24 éléments.