Contrôle final

Calculatrice et documents sont interdits.
Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.
Le barème est donné à titre indicatif.
La qualité de la rédaction sera fortement prise en compte dans la notation.

Rappel des notations : $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille 3 ; c'est un groupe pour l'addition des matrices. On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. On note enfin $\mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ des matrices inversibles ; c'est un groupe pour la multiplication matricielle, d'élément neutre I_3.

Pour des réels a, b, c, d et e, on note

$$M(a,b,c,d,e) = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & d & e \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R}).$$

L'objet de ce problème est d'étudier les propriétés des matrices de cette forme et notamment d'en calculer les puissances. On note $\mathcal{E}$ leur ensemble :

$$\mathcal{E} = \{M(a,b,c,d,e) \ ; \ (a,b,c,d,e) \in \mathbf{R}^5\}.$$

1. **Structures de groupes dans $\mathcal{E}$** (8 points)
   (a) Soient M et M' dans $\mathcal{E}$. Montrer que $M + M' \in \mathcal{E}$.
   (b) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_3(\mathbf{R}), +)$.
   (c) Soient M et M' dans $\mathcal{E}$. Montrer que $MM' \in \mathcal{E}$.
   (d) Soient $(a,b,c,d,e) \in \mathbf{R}^5$ avec $a \neq 0$, $c \neq 0$ et $e \neq 0$.
   Montrer, en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss, que $M(a,b,c,d,e)$ est inversible et déterminer sa matrice inverse.
   (e) Montrer également que $M(a,b,0,d,e)$ et $M(a,b,c,d,0)$ ne sont pas inversibles.
   Le cas de $M(0,b,c,d,e)$ est analogue, on ne demande pas de le traiter.
   (f) On note $\mathcal{F} = \{M(a,b,c,d,e) \in \mathcal{E} \mid a \neq 0, c \neq 0 \text{ et } e \neq 0\}$. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_3(\mathbf{R}), \times)$.

2. **Diagonalisation et calcul de puissances** (4 points)
   Soit $A = M(a,b,c,d,e) \in \mathcal{E}$ telle que a et e soient différents de c. On pose alors $P = M(1, b(c-e), (c-a)(c-e), d(c-a), 1)$.
   (a) Vérifier que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.
   Le calcul de P^{-1} a été traité dans la question 1-d.
   (b) Déterminer ainsi l'expression de A^n pour tout $n \geqslant 1$.

3. **Un sous-ensemble de $\mathcal{F}$** (9 points)

   La condition « a et e différents de c » n'est pas satisfaite par toutes les matrices de $\mathcal{E}$. Nous étudions dans cette partie un autre type de matrices, celles dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1. On note $\mathcal{G}$ leur ensemble :

   $$\mathcal{G} = \{M(1, b, 1, d, 1)\ ;\ b \in \mathbf{R}, d \in \mathbf{R}\}.$$

   Pour alléger les notations, nous noterons $M_{b,d} = M(1, b, 1, d, 1)$.

   (a) On commence par étudier la diagonalisabilité de ces matrices. Soient b et d dans $\mathbf{R}$ et $M_{b,d} \in \mathcal{G}$. On suppose que $M_{b,d}$ est diagonalisable ; il existe alors une matrice diagonale D et une matrice inversible Q de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $Q^{-1}M_{b,d}Q = D$.

   i. Calculer $(M_{b,d} - I_3)^2$. En déduire de nouveau l'expression de $M_{b,d}^{-1}$.

   ii. Déduire du calcul précédent que $(D - I_3)^2 = 0$. *Indication : $I_3 = Q^{-1}I_3Q$.*

   iii. En déduire que $D = I_3$. *Indication : D est une matrice diagonale.*

   iv. Conclure que la seule matrice diagonalisable de $\mathcal{G}$ est I_3.

   Autrement dit, mis à part pour la matrice I_3, nous ne pouvons pas utiliser la diagonalisation pour calculer les puissances des matrices de $\mathcal{G}$.

   (b) Propriétés de $\mathcal{G}$ et calculs de puissances.

   i. Montrer que l'application $f : (b, d) \mapsto M_{b,d}$ définit un morphisme du groupe $(\mathbf{R}^2, +)$ vers $(\mathcal{F}, \times)$.

   ii. En déduire (à l'aide d'une propriété simple des morphismes) que $\mathcal{G}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{F}, \times)$.

   iii. Soient b et d dans $\mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$. Que peut-on dire de $f(nb, nd)$?
   En déduire l'expression de $M_{b,d}^n$ en fonction de l'entier n.

4. **Autres éléments de $\mathcal{E}$** (3 points)

   Quelles matrices de $\mathcal{E}$ n'ont pas été étudiées dans les deux parties précédentes ?
   Pour chaque type de matrice, conjecturer l'expression de ses puissances. Aucune démonstration n'est demandée.