

CONTRÔLE FINAL

Calculatrice et documents sont interdits.

Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.

Le barème est donné à titre indicatif.

La qualité de la rédaction sera fortement prise en compte dans la notation.

Rappel des notations : $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille 3 ; c'est un groupe pour l'addition des matrices. On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. On note enfin $\text{GL}_3(\mathbf{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ des matrices inversibles ; c'est un groupe pour la multiplication matricielle, d'élément neutre I_3 .

Pour des réels a, b, c, d et e , on note

$$M(a, b, c, d, e) = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & d & e \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R}).$$

L'objet de ce problème est d'étudier les propriétés des matrices de cette forme et notamment d'en calculer les puissances. On note $\mathcal{E}$ leur ensemble :

$$\mathcal{E} = \{M(a, b, c, d, e) ; (a, b, c, d, e) \in \mathbf{R}^5\}.$$

1. Structures de groupes dans $\mathcal{E}$ (8 points)

- (a) Soient M et M' dans $\mathcal{E}$. Montrer que $M + M' \in \mathcal{E}$.

Soient $a, b, c, d, e, a', b', c', d', e'$ tels que $M = M(a, b, c, d, e)$ et $M' = M(a', b', c', d', e')$.
Alors

$$M + M' = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & d & e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & b' & 0 \\ 0 & c' & 0 \\ 0 & d' & e' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + a' & b + b' & 0 \\ 0 & c + c' & 0 \\ 0 & d + d' & e + e' \end{bmatrix} = M(a + a', b + b', c + c', d + d', e + e').$$

Ainsi $M + M'$ est bien un élément de $\mathcal{E}$.

- (b) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_3(\mathbf{R}), +)$.

Nous venons de montrer la stabilité de $\mathcal{E}$ par addition.

D'autre part, on vérifie que la matrice nulle est élément de $\mathcal{E}$: elle est en effet égale à $M(0, 0, 0, 0, 0)$.

Enfin, l'opposée d'une matrice $M(a, b, c, d, e) \in \mathcal{E}$ est $M(-a, -b, -c, -d, -e)$. C'est encore un élément de $\mathcal{E}$.

Ainsi, $\mathcal{E}$ est bien un sous-groupe de $(\mathcal{M}_3(\mathbf{R}), +)$.

- (c) Soient M et M' dans $\mathcal{E}$. Montrer que $MM' \in \mathcal{E}$.

Reprenons les matrices M et M' de la question a. Alors

$$MM' = \begin{bmatrix} aa' & ab' + bc' & 0 \\ 0 & cc' & 0 \\ 0 & dc' + ed' & ee' \end{bmatrix} = M(aa', ab' + bc', cc', dc' + ed', ee').$$

Ainsi MM' est bien un élément de $\mathcal{E}$.

- (d) Soient $(a, b, c, d, e) \in \mathbf{R}^5$ avec $a \neq 0$, $c \neq 0$ et $e \neq 0$.

Montrer, en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss, que $M(a, b, c, d, e)$ est inversible et déterminer sa matrice inverse.

Appliquons l'algorithme de Gauss à la matrice $M(a, b, c, d, e)$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & d & e & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad L_3 \leftarrow cL_3 - dL_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} ac & 0 & 0 & c & -b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ce & 0 & -d & c \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{L_1}{ac} \\ L_2 \leftarrow \frac{L_2}{c} \\ L_3 \leftarrow \frac{L_3}{ce} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ce & 0 & -d & c \end{array} \right] \quad L_1 \leftarrow cL_1 - bL_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{d}{ce} & \frac{1}{e} \end{array} \right]$$

On notera que les deux premières opérations sont autorisées car $c \neq 0$, et les dernières également car $a \neq 0$ et $e \neq 0$.

On conclut que $M(a, b, c, d, e)$ est inversible et sa matrice inverse est la matrice $M(\frac{1}{a}, -\frac{b}{ac}, \frac{1}{c}, -\frac{d}{ce}, \frac{1}{e})$.

- (e) Montrer également que $M(a, b, 0, d, e)$ et $M(a, b, c, d, 0)$ ne sont pas inversibles.

Le cas de $M(0, b, c, d, e)$ est analogue, on ne demande pas de le traiter.

La matrice $M(a, b, 0, d, e)$ a sa deuxième ligne constituée de 0. Ce n'est donc pas une matrice inversible. Quant à la matrice $M(a, b, c, d, 0)$, soit $c = 0$ et on retrouve le cas précédent, soit $c \neq 0$ et dans ce cas l'opération $L_3 \leftarrow cL_3 - dL_2$ conduit à une matrice dont la troisième ligne est nulle. L'algorithme de Gauss permet alors de conclure que $M(a, b, c, d, 0)$ n'est pas inversible.

- (f) On note $\mathcal{F} = \{M(a, b, c, d, e) \in \mathcal{E} \mid a \neq 0, c \neq 0 \text{ et } e \neq 0\}$. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-groupe de $(\text{GL}_3(\mathbf{R}), \times)$.

L'ensemble $\mathcal{F}$ est d'après ce qui précède l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{E}$.

Nous avons montré à la question c que le produit de deux éléments M et M' de $\mathcal{E}$ est encore élément de $\mathcal{E}$. On sait de plus que le produit de deux matrices inversibles est encore une matrice inversible. On en déduit que si $M \in \mathcal{F}$ et $M' \in \mathcal{F}$, alors $MM' \in \mathcal{F}$.

De plus $I_3 = M(1, 0, 1, 0, 1)$ est élément de $\mathcal{F}$.

Enfin, le résultat de la question d permet de montrer que la matrice inverse d'un élément de $\mathcal{F}$ est encore un élément de $\mathcal{F}$.

On conclut que $\mathcal{F}$ est un sous-groupe de $(\text{GL}_3(\mathbf{R}), \times)$.

2. Diagonalisation et calcul de puissances (4 points)

Soit $A = M(a, b, c, d, e) \in \mathcal{E}$ telle que a et e soient différents de c . On pose alors $P = M(1, b(c-e), (c-a)(c-e), d(c-a), 1)$.

- (a) Vérifier que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.

Le calcul de P^{-1} a été traité dans la question 1-d.

D'après la question d, P est inversible et $P^{-1} = M(1, -\frac{b}{c-a}, \frac{1}{(c-a)(c-e)}, -\frac{d}{c-e}, 1)$.

D'après le calcul de la question c,

$$AP = M(a, ab(c-e) + b(c-a)(c-e), c(c-a)(c-e), d(c-a)(c-e) + ed(c-a), e)$$

puis

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= M(a, \quad ab(c-e) + b(c-a)(c-e) - bc(c-e), \quad c, \\ &\quad -dc(c-a) + d(c-a)(c-e) + ed(c-a), \quad e) \\ &= M(a, 0, c, 0, e). \end{aligned}$$

Ainsi $P^{-1}AP$ est la matrice diagonale de coefficients diagonaux a , c et e .

- (b) Déterminer ainsi l'expression de A^n pour tout $n \geq 1$.

Notons $D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}$. D'après ce qui précède $P^{-1}AP = D$, donc $A = PDP^{-1}$.

On en déduit que pour tout entier n , $A^n = PD^nP^{-1}$. Or D étant diagonale, ses puissances sont faciles à calculer : $D = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & c^n & 0 \\ 0 & 0 & e^n \end{bmatrix}$.

On en déduit l'expression des puissances de A :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad A^n = \begin{bmatrix} a^n & b \frac{a^n - c^n}{a - c} & 0 \\ 0 & c^n & 0 \\ 0 & d \frac{e^n - c^n}{e - c} & e^n \end{bmatrix}$$

3. Un sous-ensemble de $\mathcal{F}$ (9 points)

La condition « a et e différents de c » n'est pas satisfaite par toutes les matrices de $\mathcal{E}$. Nous étudions dans cette partie un autre type de matrices, celles dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1. On note $\mathcal{G}$ leur ensemble :

$$\mathcal{G} = \{M(1, b, 1, d, 1) ; b \in \mathbf{R}, d \in \mathbf{R}\}.$$

Pour alléger les notations, nous noterons $M_{b,d} = M(1, b, 1, d, 1)$.

- (a) On commence par étudier la diagonalisabilité de ces matrices. Soient b et d dans $\mathbf{R}$ et $M_{b,d} \in \mathcal{G}$. On suppose que $M_{b,d}$ est diagonalisable ; il existe alors une matrice diagonale D et une matrice inversible Q de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $Q^{-1}M_{b,d}Q = D$.

- i. Calculer $(M_{b,d} - I_3)^2$. En déduire de nouveau l'expression de $M_{b,d}^{-1}$.

On a $M_{b,d} - I_3 = M(0, b, 0, d, 0)$ et on obtient $(M_{b,d} - I_3)^2 = 0$.

On en déduit en développant que $M_{b,d}^2 - 2M_{b,d} + I_3 = 0$. Donc $M_{b,d}(2I_3 - M_{b,d}) = I_3$.

On conclut que $M_{b,d}$ est inversible et son inverse est $M_{b,d}^{-1} = 2I_3 - M_{b,d}$.

Il s'agit de la matrice $M(1, -b, 1, -d, 1)$ qui correspond bien à ce qu'on a obtenu dans la question 1-d avec $a = c = e = 1$.

- ii. Déduire du calcul précédent que $(D - I_3)^2 = 0$. *Indication : $I_3 = Q^{-1}I_3Q$.*

$$\begin{aligned} (D - I_3)^2 &= (Q^{-1}M_{b,d}Q - Q^{-1}I_3Q)^2 = (Q^{-1}(M_{b,d} - I_3)Q)^2 \\ &= Q^{-1}(M_{b,d} - I_3)QQ^{-1}(M_{b,d} - I_3)Q = Q^{-1}(M_{b,d} - I_3)^2Q. \end{aligned}$$

Or on sait que $(M_{b,d} - I_3)^2 = 0$. On en déduit bien que $(D - I_3)^2 = 0$.

iii. En déduire que $D = I_3$. *Indication : D est une matrice diagonale.*

Notons α , β et γ les coefficients diagonaux de D . Alors $D - I_3$ est la matrice diagonale de coefficients $\alpha - 1$, $\beta - 1$ et $\gamma - 1$. Et $(D - I_3)^2$ est la matrice diagonale de coefficients $(\alpha - 1)^2$, $(\beta - 1)^2$ et $(\gamma - 1)^2$.

Or $(D - I_3)^2 = 0$. Donc ces trois coefficients sont nuls et on en déduit que $\alpha = 1$, $\beta = 1$ et $\gamma = 1$. Finalement, on obtient $D = I_3$.

iv. Conclure que la seule matrice diagonalisable de $\mathcal{G}$ est I_3 .

On avait supposé que $M_{b,d}$ pouvait se diagonaliser sous la forme $Q^{-1}M_{b,d}Q = D$. On a montré que cela impliquait que $D = I_3$. Donc $Q^{-1}M_{b,d}Q = I_3$. On en déduit $M = QI_3Q^{-1} = I_3$.

Ainsi la seule matrice diagonalisable de $\mathcal{G}$ est la matrice I_3 . (Elle est bien diagonalisable puisqu'elle est déjà diagonale.)

Autrement dit, mis à part pour la matrice I_3 , nous ne pouvons pas utiliser la diagonalisation pour calculer les puissances des matrices de $\mathcal{G}$.

(b) Propriétés de $\mathcal{G}$ et calculs de puissances.

i. Montrer que l'application $f : (b, d) \mapsto M_{b,d}$ définit un morphisme du groupe $(\mathbf{R}^2, +)$ vers $(\mathcal{F}, \times)$.

Soient (b, d) et (b', d') dans $\mathbf{R}^2$. Alors

$$f((b, d) + (b', d')) = f(b + b', d + d') = M_{b+b', d+d'}.$$

D'autre part, en utilisant le calcul de la question 1-c :

$$f(b, d) \times f(b', d') = M_{b,d} \times M_{b',d'} = M_{b+b', d+d'}.$$

Donc $f((b, d) + (b', d')) = f(b, d) \times f(b', d')$ et f définit bien un morphisme du groupe $(\mathbf{R}^2, +)$ vers $(\mathcal{F}, \times)$.

ii. En déduire (à l'aide d'une propriété simple des morphismes) que $\mathcal{G}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{F}, \times)$.

On sait que l'image d'un morphisme de groupe est un sous-groupe du groupe d'arrivée. Or ici, l'image de $\mathbf{R}^2$ par f est égale à $\mathcal{G}$, par définition de $\mathcal{G}$. On en déduit que $\mathcal{G}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{F}, \times)$.

iii. Soient b et d dans $\mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$. Que peut-on dire de $f(nb, nd)$?

En déduire l'expression de $M_{b,d}^n$ en fonction de l'entier n .

Comme f est un morphisme de $(\mathbf{R}^2, +)$ vers $(\mathcal{F}, \times)$, on a $f(n(b, d)) = f(b, d)^n$. Donc $f(nb, nd) = M_{b,d}^n$.

On en déduit que $M_{b,d}^n = M_{nb, nd} = \begin{bmatrix} 1 & nb & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & nd & 1 \end{bmatrix}.$

Quelles matrices de $\mathcal{E}$ n'ont pas été étudiées dans les deux parties précédentes ?
 Pour chaque type de matrice, conjecturer l'expression de ses puissances. Aucune démonstration n'est demandée.

Nous avons étudié les matrices $M(a, b, c, d, e)$ avec $a \neq c$ et $e \neq c$ puis celles avec $a = c = e = 1$. Il nous reste de manière plus générale les matrices avec $a = c = e$, puis celles avec $a = c$ mais $e \neq c$ et enfin celles avec $c = e$ mais $a \neq c$.

Pour chaque cas, on peut calculer les premières puissances et conjecturer une expression générale en s'inspirant des cas déjà étudiés. On obtient ainsi les résultats suivants :

$$\begin{bmatrix} c & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & d & c \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} c^n & nbc^{n-1} & 0 \\ 0 & c^n & 0 \\ 0 & ndc^{n-1} & c^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & d & e \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} c^n & nbc^{n-1} & 0 \\ 0 & c^n & 0 \\ 0 & d\frac{e^n - c^n}{e - c} & e^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & d & c \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & b\frac{a^n - c^n}{a - c} & 0 \\ 0 & c^n & 0 \\ 0 & ndc^{n-1} & c^n \end{bmatrix}$$

Ces expressions se démontrent aisément par récurrence sur n .