

## CONTRÔLE FINAL

---

*Calculatrice et documents sont interdits.*

*Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.*

*Le barème est donné à titre indicatif.*

**La qualité de la rédaction sera fortement prise en compte dans la notation.**

### Exercice 1 : décomposition d'une permutation en 3-cycles (8 pts)

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$  et  $(\mathfrak{S}_n, \circ)$  le groupe des permutations correspondant. On rappelle que pour deux permutations  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  dans  $\mathfrak{S}_n$ ,  $\sigma_1\sigma_2$  désigne la composée  $\sigma_1 \circ \sigma_2$ . On rappelle également que pour  $i$  et  $j$  deux éléments distincts de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\tau_{ij}$  désigne la transposition qui échange  $i$  et  $j$ .

Pour  $i, j$  et  $k$  des éléments **distincts** de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $(i \ j \ k)$  le 3-cycle de  $\mathfrak{S}_n$  qui permute  $i, j$  et  $k$  dans cet ordre. Il s'agit de la permutation qui envoie  $i$  sur  $j$ ,  $j$  sur  $k$  et  $k$  sur  $i$  et qui fixe tous les autres éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  (schématisée par  $i \mapsto j \mapsto k \mapsto i$ ).

On admet enfin le résultat suivant :

**Théorème :** toute permutation de  $\mathfrak{S}_n$  peut s'écrire comme une composée de transpositions. Une telle écriture n'est pas unique mais il y a tout de même une propriété invariante : si une permutation  $\sigma$  peut s'écrire comme une composée de  $r$  transpositions mais également comme une composée de  $s$  autres transpositions, alors  $r$  et  $s$  ont la même parité.

Le but de cet exercice est de caractériser les permutations que l'on peut écrire comme une composée de 3-cycles.

1. Soient  $i, j$  et  $k$  des éléments distincts. Calculer la composée  $\tau_{ij}\tau_{jk}$  et reconnaître un 3-cycle.
2. Soient  $i, j, k$  et  $\ell$  des entiers distincts de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Calculer la composée  $(i \ j \ k)(k \ \ell \ j)$  et reconnaître une composée de deux transpositions.
3. Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  une permutation que l'on peut décomposer en un produit d'un nombre pair de transpositions. Montrer, à l'aide des deux questions précédentes, que  $\sigma$  peut se décomposer en un produit de 3-cycles.
4. Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  une permutation que l'on peut décomposer en un produit d'un nombre impair de transpositions. Montrer, à l'aide de la question 1 et du résultat admis en introduction, que  $\sigma$  ne peut pas se décomposer en un produit de 3-cycles.
5. Soit  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_5$ . Déterminer, si cela est possible, une décomposition de  $\sigma$  en 3-cycles.
6. Les permutations pouvant se décomposer en 3-cycles forment un sous-groupe de  $\mathfrak{S}_n$ . Combien y en a-t-il dans  $\mathfrak{S}_4$ ? Les donner toutes.  
*On pourra utiliser le théorème de Lagrange.*

## Exercice 2 : matrices et nombres complexes (15 pts)

Dans  $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ , l'ensemble des matrices réelles de taille 2, on note  $0_2$  la matrice nulle,  $I_2$  la matrice identité et  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$  l'ensemble des matrices inversibles.

Pour  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ , on note  $M_{x,y} = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$ .

On note  $G$  l'ensemble des matrices de cette forme :  $G = \{M_{x,y} ; (x, y) \in \mathbf{R}^2\}$ .

On note enfin  $G^* = G \setminus \{0_2\}$ .

### 1. Structure de groupe

- (a) Soient  $x, y, x'$  et  $y'$  des nombres réels. Calculer le produit  $M_{x,y}M_{x',y'}$ .
- (b) Soit  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Montrer que  $M_{x,y}$  est une matrice inversible et donner l'expression de son inverse.
- (c) Montrer que  $G^*$  est un sous-groupe de  $(\mathrm{GL}_2(\mathbf{R}), \times)$ .

### 2. Isomorphisme entre $\mathbf{C}^*$ et $G^*$

On définit l'application

$$\begin{aligned} f : G^* &\rightarrow \mathbf{C}^* \\ M_{x,y} &\mapsto x + iy. \end{aligned}$$

- (a) Montrer que  $f$  est un morphisme de groupe de  $(G^*, \times)$  vers  $(\mathbf{C}^*, \times)$ .
- (b) Déterminer son noyau.
- (c) Montrer que  $f$  est bijectif.

### 3. Applications

L'isomorphisme  $f$  permet de lier algébriquement les nombres complexes à leurs matrices correspondantes. Pour chacune des questions matricielles suivantes, on pourra commencer par se ramener au problème de nombres complexes correspondant grâce à l'isomorphisme  $f$ .

- (a) Trouver une matrice  $A$  telle que  $A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ .
- (b) Trouver une matrice  $B$  non diagonale telle que  $B^5 = I_2$ .
- (c) Soit  $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ . Calculer  $C^{123}$ .

### 4. Extension de $G^*$

Soit  $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ . Nous souhaitons ajouter  $S$  au groupe  $G^*$ .

- (a) Soit  $M = M_{x,y} \in G^*$ . Calculer  $N = SMS$ .
- (b) Quelle relation simple y a-t-il entre les nombres complexes  $f(M)$  et  $f(N)$  ?
- (c) Déterminer le sous-groupe  $H$  de  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$  engendré par  $G^* \cup \{S\}$ .  
*On pourra commencer par calculer  $S^{-1}$ ,  $SM_{x,y}$  et  $M_{x,y}S$  et conjecturer les expressions des éléments de  $H$ .*
- (d) Expliquer comment les éléments de  $H$  peuvent être mis en correspondance avec certaines transformations géométriques du plan.