Corrigé du contrôle final

Exercice : système polynomial (4 pts)

Déterminer les solutions dans $\mathbf{C}$ du système

$$\begin{cases} x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 36x - 36 &= 0 \\ x^3 - 7x - 6 &= 0 \end{cases}$$

Indication : on pourra utiliser un outil d'arithmétique des polynômes.

Résoudre le système revient à trouver les racines communes des polynômes $P = X^4 + 4X^3 - 5X^2 - 36X - 36$ et $Q = X^3 - 7X - 6$. On calcule pour cela leur pgcd à l'aide de l'algorithme de l'Euclide :

$$P = Q \times (X+4) + 2X^2 - 2X - 12 = (X+4)Q + 2(X^2 - X - 6)$$

puis

$$Q = (X^2 - X - 6)(X+1) + 0.$$

On en déduit que $\mathrm{pgcd}(P, Q) = X^2 - X - 6 = (X+2)(X-3)$. Les racines communes à P et Q sont donc -2 et 3 ; ce sont les solutions du système :

$$\mathcal{S} = \{-2, 3\}.$$

Problème : diagonalisation des matrices

L'objectif de ce problème est de démontrer et étudier le théorème suivant :

Théorème : Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
S'il existe un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré n scindé à racines simples tel que $P(M) = 0$, alors M est diagonalisable : il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et une matrice inversible $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telles que $M = QDQ^{-1}$.

Ce théorème s'accompagne d'une méthode générale pour diagonaliser une telle matrice :

- Une fois trouvé le polynôme P de l'énoncé,
- on détermine ses n racines que l'on note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$;
- puis pour chaque i, on cherche un vecteur colonne X_i non nul tel que $(M - \lambda_i I_n)X_i = 0$;
- enfin on définit la matrice Q dont les colonnes sont les vecteurs $X_1, \ldots, X_n$. Alors Q est inversible et est la matrice permettant de diagonaliser M.

On notera I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On rappelle qu'un polynôme peut être évalué en une matrice : si $P = X^2 + 7X - 5$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, alors $P(M) = M^2 + 7M - 5I_n$.

1. **Un exemple (7 pts)**

   Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer A^2 et trouver un polynôme P de degré 2 tel que $P(A) = 0$. Les hypothèses du théorème sont-elles satisfaites ?

$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et on trouve que $A^2 - A - 2I_2 = 0$. Donc A est annulé par le polynôme $P = X^2 - X - 2$.
Il s'agit bien d'un polynôme de degré 2 (la taille de la matrice) et nous allons voir qu'il possède deux racines distinctes ; il est donc scindé à racines simples. les hypothèses de notre théorème sont donc satisfaites.

(b) Appliquer la méthode : donner les racines λ_1 et λ_2 de P puis des vecteurs X_1 et X_2 correspondants.

Les racines de P sont $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$. Cherchons $X_1 = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right)$ non nul tel que $(A - \lambda_1 I_2)X_1 = 0$, c'est-à-dire tel que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cela revient à chercher une solution non nulle du système

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 & = & 0 \\ 2x_1 + y_1 & = & 0 \end{cases}$$

On peut prendre par exemple $x_1 = 1$ et $y_1 = -2$ et ainsi poser $X_1 = \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{-2}$.

On cherche de même X_2 non nul tel que $(A - 2I_2)X_2 = 0$, ce qui revient à chercher une solution du système

$$\begin{cases} -x_2 + y_2 & = & 0 \\ x_2 - y_2 & = & 0 \end{cases}$$

On trouve par exemple $X_2 = \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{1}$.

(c) Soit Q la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ dont les colonnes sont X_1 et X_2. Calculer sa matrice inverse Q^{-1} puis le produit $Q^{-1}AQ$. Conclure.

On pose alors $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. On peut l'inverser avec la méthode du pivot de Gauss ou avec la formule vue en TD et on obtient $Q^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
On calcule ensuite le produit $Q^{-1}AQ$:

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On obtient une matrice diagonale que l'on note D. Ainsi $Q^{-1}AQ = D$, donc $A = QDQ^{-1}$. Nous avons réussi à diagonaliser A.

(d) En déduire que l'on sait calculer A^k pour tout entier k.

Alors pour tout entier k, $A^k = QD^kQ^{-1}$. or les puissances de D sont triviales : $D^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$. On en déduit donc ensuite l'expression de A^k en multipliant par Q et Q^{-1}.

2. **Démonstration partielle du théorème (6 pts)**

Nous reprenons les notations du théorème et de la méthode. Nous disposons donc d'un polynôme P de degré n, scindé, à racines simples notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tel que $P(M) = 0$. Nous supposerons de plus qu'aucun polynôme de degré strictement inférieur à n n'annule M.

(a) Montrer que $\prod_{i=1}^n (M - \lambda_i I_n) = 0$.

On sait que P est scindé à racines simples. On peut de plus le supposer unitaire sans que cela ne perturbe le raisonnement. Alors P se factorise entièrement sous la forme $P = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$. Or nous savons que $P(M) = 0$, donc $\prod_{i=1}^n (M - \lambda_i) = 0$.

(b) Si un produit de trois matrices non nulles est nul, peut-on en déduire que ces trois matrices sont non inversibles ?

On sait que si un produit de deux matrices non nulles est nul, alors ces matrices ne sont pas inversibles mais cela n'est plus vrai avec trois matrices ou plus. On peut en effet imaginer que le produit des deux premières matrices soit nul auquel cas la troisième matrice peut bien être inversible.

Donnons un exemple : soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = I_2$. Alors $AB = 0$, donc $ABC = 0$. Pourtant ces trois matrices sont non nulles et la matrice C est inversible.

(c) Montrer à l'aide de notre hypothèse supplémentaire que pour tout i, $M - \lambda_i I_n$ est non inversible.

On a $P(M) = \prod_{i=1}^n (M - \lambda_i I_n) = 0$. D'après la question précédente, on ne peut pas en déduire directement que les facteurs $M - \lambda_i I_n$ sont nuls ou non inversibles. Mais d'après notre hypothèse supplémentaire, aucun polynôme de degré $n - 1$ ou moins n'annule M. En particulier $X - \lambda_1$ et $\prod_{i=2}^n (X - \lambda_i)$ n'annulent pas M. Donc $M - \lambda_1 I_n \neq 0$ et $\prod_{i=2}^n (X - \lambda_i) \neq 0$. Or le produit de ces $\underline{2}$ matrices est nul et nous pouvons alors conclure que ces deux matrices sont non inversibles. Donc $M - \lambda_1 I_n$ est non inversible. Ce raisonnement s'applique de la même manière pour déduire que $M - \lambda_i I_n$ est non inversible pour tout i.

(d) Montrer que si N est une matrice non inversible, alors il existe un vecteur colonne X non nul tel que $NX = 0$. *On pourra raisonner à partir de l'algorithme du pivot de Gauss.*

En déduire que pour tout i, il existe un vecteur colonne $X_i \neq 0$ tel que $MX_i = \lambda_i X_i$.

Supposons N non inversible. Nous savons alors que l'algorithme de Gauss aboutira à une matrice possédant une ligne de 0. Si on note $T_1, T_2, \ldots, T_k$ les matrices élémentaires correspondant aux étapes de l'algorithme, alors on obtient que $T_k T_{k-1} \cdots T_1 N$ possède une ligne de 0. Or, pour une telle matrice, il est facile de trouver un vecteur X non nul tel que le produit soit nul : il suffit de considérer le vecteur X dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la coordonnée correspondant à notre ligne de 0.

Ainsi $T_k T_{k-1} \cdots T_1 N X = 0$. Mais comme toutes les matrices T_i sont inversibles, on peut multiplier par leurs inverses et il reste $NX = 0$.

Comme nous supposons que les matrices $M - \lambda_i I_n$ sont non inversibles, on déduit avec ce qui précède qu'il existe des vecteurs X_i non nuls tels que $(M - \lambda_i I_n)X_i = 0$, donc $MX_i = \lambda_i X_i$.

(e) Notons Q la matrice dont les colonnes sont les n vecteurs X_i et D la matrice diagonale dont les valeurs diagonales sont les racines λ_i.
Calculer, en raisonnant sur les colonnes de Q, les produits MQ et QD. En déduire qu'on a réussi à diagonaliser M.

En colonnes, $Q = (X_1|X_2|\cdots|X_n)$. Alors le produit MQ s'écrit $(MX_1|MX_2|\cdots|MX_n) = (\lambda_1 X_1|\lambda_2 X_2|\cdots|\lambda_n X_n)$ d'après la question précédente.
D'autre part, en calculant QD, on obtient

$$QD = (X_1|X_2|\cdots|X_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1 X_1|\lambda_2 X_2|\cdots|\lambda_n X_n).$$

Ainsi on obtient $MQ = QD$, et en admettant que Q est inversible, on déduit $M = QDQ^{-1}$. La matrice M est diagonalisée.

3. **Contre-exemples (7 pts)**

Nous montrons dans cette partie, à l'aide de deux contre-exemples, que si certaines hypothèses du théorème ne sont pas satisfaites, alors la diagonalisabilité n'est plus assurée.

Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer B^2 et trouver un polynôme de degré 2 annulant B.

$B^2 = -I_2$ et B est donc annulée par le polynôme $X^2 + 1$.

(b) Supposons que B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$: il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible Q dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telles que $B = QDQ^{-1}$.
Que vaut alors la matrice D^2 ? En déduire les valeurs diagonales de D et aboutir à une contradiction.

On suppose $B = QDQ^{-1}$. Alors $B^2 = QD^2Q^{-1}$. or $B^2 = -I_2$, donc $QD^2Q^{-1} = -I^2$, donc $D^2 = -Q^{-1}I_2Q = -I_2$. Si on note $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, alors on a obtenu $\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On en déduit $a^2 = b^2 = -1$. Or a et b sont supposés réels et on aboutit donc à une contradiction. La matrice B n'est pas diagonalisable.

(c) Quelle hypothèse du théorème n'est pas satisfaite ?

Le polynôme X^2+1 est irréductible dans $\mathbf{R}[X]$ et n'est donc pas scindé sur $\mathbf{R}$. C'est cette hypothèse qui n'est pas satisfaite.

(d) Peut-on penser que B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$?

En revanche X^2+1 est scindé dans $\mathbf{C}[X]$ et ses racines sont i et $-i$. Il est donc de degré 2, scindé et à racines simples dans $\mathbf{C}$. On peut imaginer que le théorème est alors valable et que B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$.

Soit $C = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et soit $P = X^3+6X^2+12X+8$. On admet que $P(C)=0$.

(e) Montrer que P possède une racine multiple et factoriser P.

Pour chercher les racines multiples de P, on peut chercher ses racines communes avec P'. On a $P' = 3X^2+12X+12$. Il possède une racine double -2. Et on peut vérifier que $P(-2)=0$. Donc -2 est une racine multiple de P. On peut alors factoriser P par $(X+2)^2$ et on trouve finalement que -2 est racine triple de P : $P=(X+2)^3$ (remarque : on aurait aussi pu reconnaître la formule du binôme).

(f) Supposons C diagonalisable et notons D la matrice diagonale correspondante. Montrer que $(D+2I_3)^3 = 0$.

Supposons qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible Q telles que $C = QDQ^{-1}$. Alors $C+2I_3 = QDQ^{-1}+2I_3 = QDQ^{-1}+Q(2I_3)Q^{-1}$ car $QI_3Q^{-1} = I_3$. Enfin $C+2I_3 = Q(D+2I_3)Q^{-1}$, donc $(C+2I_3)^3 = Q(D+2I_3)^3Q^{-1}$. Comme $P(C)=0$, on a $(C+2I_3)^3=0$, donc $Q(D+2I_3)^3Q^{-1}=0$ et on déduit $(D+2I_3)^3=0$.

(g) En déduire les valeurs diagonales de D.

Si on note $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, alors $(D+2I_3)^3 = \begin{pmatrix} (a+2)^3 & 0 & 0 \\ 0 & (b+2)^3 & 0 \\ 0 & 0 & (c+2)^3 \end{pmatrix}$. On en déduit $(a+2)^3 = (b+2)^3 = (c+2)^3 = 0$, donc $a=b=c=-2$. Finalement on obtient $D=-2I_3$.

(h) En déduire que $C+2I_3=0$ et aboutir à une contradiction.

or $C = QDQ^{-1}$, donc $C = Q(-2I_3)Q^{-1} = -2I_3$. Mais nous voyons bien que C n'est pas égale à $-2I_3$ et nous obtenons donc une contradiction. la matrice C n'est donc pas diagonalisable.