# Corrigé du contrôle final

## Problème 1 : intersection de courbes (6 pts)

Le but de ce problème est de résoudre dans $\mathbf{R}^2$ le système non linéaire

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} x^3 + (-y^4 - y^2 + 2y + 7)x - y^3 + 3y^2 - 4 & = & 0 \\ x^2 - (y+1)x - y^2 + 4y - 4 & = & 0 \end{array} \right.$$

1. Donner la décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ des polynômes

$$R = X^4 - X^2 - 12 \quad \text{et} \quad S = X^3 - 17X + 16.$$

On peut voir $R$ comme un polynôme de degré 2 en $X^2$ dont les racines sont 4 et $-3$. Donc $R = (X^2-4)(X^2+3)$. Le polynôme $X^2+3$ est de degré 2 sans racine réelle est est donc irréductible dans $\mathbf{R}[X]$. Ce n'est pas le cas de $X^2-4$ et on obtient ainsi la décomposition de $R$ dans $\mathbf{R}[X]$ : $R = (X-2)(X+2)(X^2+3)$.

Le polynôme $S$ a une racine évidente : 1. On le factorise : $S = (X-1)(X^2+X-16)$. On cherche les racines de $X^2+X-16$ et on obtient la décomposition de $S$ dans $\mathbf{R}[X]$ : $S = (X-1)(X - \frac{-1+\sqrt{65}}{2})(X - \frac{-1-\sqrt{65}}{2})$.

2. Soit $y$ un réel et considérons les polynômes de $\mathbf{R}[X]$

$$P = X^3 + (-y^4 - y^2 + 2y + 7)X - y^3 + 3y^2 - 4 \quad \text{et} \quad Q = X^2 - (y+1)X - y^2 + 4y - 4.$$

Écrire la division euclidienne de $P$ par $Q$.

La division de $P$ par $Q$ est : $P = (X+y+1)Q - xR(y)$.

3. En déduire que si $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ est solution du système $(S)$, alors $x = 0$ ou $R(y) = 0$.

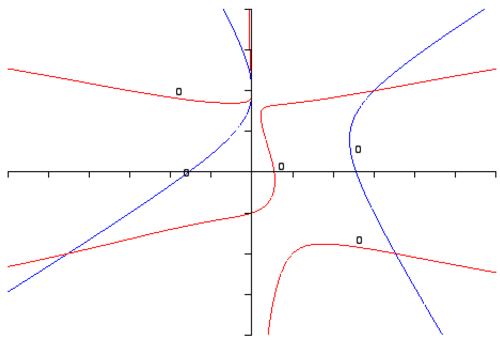
Si $(x,y)$ est solution du système, alors cela signifie que $P(x) = 0$ et $Q(x) = 0$. D'après l'égalité obtenue dans la question précédente, on en déduit que $xR(y) = 0$. Donc $x = 0$ ou $R(y) = 0$.

4. Déterminer toutes les solutions $(x,y)$ réelles du système $(S)$.

On connaît les racines réelles de $R$ : 2 et $-2$. Donc si $(x,y)$ est solution de $(S)$, alors $x = 0$ ou $y = 2$ ou $y = -2$. Il faut alors dans chaque cas déterminer les valeurs possibles de l'autre paramètre.
Si $x = 0$, le système devient $\left\{ \begin{array}{rcl} -y^3 + 3y^2 - 4 & = & 0 \\ -y^2 + 4y - 4 & = & 0 \end{array} \right.$ L'unique solution de la seconde équation est $y = 2$ et on peut vérifier que c'est également une solution de la première équation. Donc $(0,2)$ est solution de $(S)$.

Si $y=2$, le système devient $\left\{\begin{array}{rcl} x^3-9x & = & 0 \\ x^2-3x & = & 0 \end{array}\right.$. Les solutions de ces deux équations sont $x=0$ et $x=3$. Donc $(0,2)$ et $(3,2)$ sont solutions de $(S)$.
Si $y=-2$, le système devient $\left\{\begin{array}{rcl} x^3-17x+16 & = & 0 \\ x^2+x-16 & = & 0 \end{array}\right.$ On reconnaît le polynôme $S$ est l'un de ses diviseurs. Les racines communes à ces deux polynômes sont $r_1 = \frac{-1+\sqrt{65}}{2}$ et $r_2 = \frac{-1-\sqrt{65}}{2}$. Donc $(r_1,-2)$ et $(r_2,-2)$ sont solutions de $(S)$.
Conclusion : le système possède 4 solutions réelles : $(0,2), (3,2), (r_1,-2)$ et $(r_2,-2)$. (Cela correspond bien à ce qu'on peut visualiser sur la figure.)

*Remarque (inutile pour la résolution de l'exercice) : résoudre le système $(S)$ revient à déterminer les points d'intersection des courbes suivantes.*



## Problème 2 : le groupe orthogonal

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n$ à coefficients réels. On note $\mathcal{G}l_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On rappelle que c'est un groupe pour la multiplication des matrices.

On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est orthogonale si le produit de $M$ et de sa transposée est égal à la matrice identité : ${}^tMM = M{}^tM = I_n$. On note $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Le but de ce problème est d'étudier les propriétés des matrices orthogonales.

### I. Généralités (4 pts)

1. Montrer qu'une matrice orthogonale est inversible et préciser son inverse.

   Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$. Alors par définition ${}^tMM = M{}^tM = I_n$. On en déduit que $M$ est inversible et que son inverse est égale à sa transposée : $M^{-1} = {}^tM$.

2. Montrer que l'ensemble des matrices orthogonales est un sous-groupe de $(\mathcal{G}l_n(\mathbf{R}), \times)$.

   - Montrons que le produit de deux matrices orthogonales est encore une matrice orthogonale : soient $M$ et $N$ dans $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$. Montrons que $MN \in O$ : ${}^t(MN)(MN) = (MN){}^t(MN) = I_n$.
     On a ${}^t(MN)(MN) = {}^tN{}^tMMN$. or $M, N \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$, donc ${}^tMM = I_n$ et ${}^tNN = I_n$. Ainsi ${}^t(MN)(MN) = {}^tNI_nN = {}^tNN = I_n$. On montre de même que $(MN){}^t(MN) = I_n$ et on peut conclure que $MN \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$.
   - Montrons que $I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ : ${}^tI_nIn = I_nI_n = I_n$ et de même $I_n{}^tI_n = I_n$ donc $I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$.
   - Montrons que l'inverse d'une matrice orthogonale est orthogonale : soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$. On a vu que $M^{-1} = {}^tM$. Et on a ${}^t({}^tM){}^tM = M{}^tM = I_n$ et de même ${}^tM{}^t({}^tM) = I_n$. Donc $M^{-1} = {}^tM \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$.

   On déduit de tout cela que $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe de $(\mathcal{G}l_n(\mathbf{R}), \times)$.

3. Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$. Notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de la matrice $M$.
   Montrer que les vecteurs $C_1, \ldots, C_n$ forment un repère orthonormé, c'est-à-dire :

   $$\forall i \neq j, \quad <C_i|C_j> = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall i, \quad <C_i|C_i> = 1,$$

   où $<C_i|C_j>$ désigne le produit scalaire usuel de deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$.
   *Cette propriété justifie le nom donné à ces matrices.*

   Il suffit d'expliciter le produit matriciel ${}^tMM = I_n$. On rappelle que le coefficient $(i, j)$ de la matrice $AB$ est obtenu en faisant le produit scalaire de la ligne $i$ de $A$ par la colonne $j$ de $B$. Ici, les lignes de ${}^tM$ sont égales aux colonnes de $M$. Et le résultat du produit est égal à $I_n$. Donc si $i \neq j$, le produit scalaire de la ligne $i$ de ${}^tM$ (donc de la colonne $i$ de $M$) par la colonne $j$ de $M$ vaut 0. Et de même si $i = j$ le produit scalaire de la colonne $i$ par elle-même est égal à 1.
   On en déduit bien que les colonnes de $M$ forment un repère orthonormé de $\mathbf{R}^n$.
   Remarque : en raisonnant avec $M{}^tM = I_n$ on montre également que les lignes de $M$ forment un repère orthonormé.

## II. Groupe orthogonal et isométries (9 pts)

On rappelle qu'une application linéaire $\varphi$ de $\mathbf{R}^n$ vers $\mathbf{R}^n$ est représentée par une matrice $M_\varphi$ : $\forall X \in \mathbf{R}^n,\ \varphi(X) = M_\varphi X$.

On peut alors montrer que le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices représentant les isométries de $\mathbf{R}^n$ ayant 0 pour point fixe.

Nous ne démontrerons pas ce résultat et nous contenterons de traiter des exemples dans le plan et l'espace.

1. Fixons $n = 2$. Les isométries du plan ayant 0 pour point fixe sont les rotations de centre 0 et les symétries orthogonales dont l'axe passe par 0.

   (a) Rappeler l'écriture complexe de la rotation $R_\theta$ de centre 0 et d'angle $\theta \in \mathbf{R}$ et de la symétrie $S_\theta$ dont l'axe est la droite passant par 0 et formant un angle $\theta$ avec l'axe des abscisses.

   $R_\theta : z \mapsto e^{i\theta} z$ et $S_\theta : z \mapsto e^{2i\theta}\bar{z}$.

   (b) Passer en notation algébrique et écrire ces applications sous la forme $(x, y) \mapsto R_\theta(x, y)$ et $(x, y) \mapsto S_\theta(x, y)$.

   Écrivons $z$ sous forme algébrique : $z = x + iy$. Alors $R_\theta(x+iy) = (\cos\theta + i\sin\theta)(x+iy) = (\cos\theta x - \sin\theta y) + i(\sin\theta x + \cos\theta y)$. Ainsi vue dans $\mathbf{R}^2$, l'application $R_\theta$ devient $(x, y) \mapsto (\cos\theta x - \sin\theta y, \sin\theta x + \cos\theta y)$.
   De même $S_\theta(x + iy) = (\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))(x - iy) = (\cos(2\theta)x + \sin(2\theta)y) + i(\sin(2\theta)x - \cos(2\theta)y)$. $S_\theta : (x, y) \mapsto (\cos(2\theta)x + \sin(2\theta)y, \sin(2\theta)x - \cos(2\theta)y)$.

   (c) Donner les matrices de ces applications linéaires et vérifier qu'elles sont bien orthogonales.

   La matrice de l'application linéaire $R_\theta$ est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. On calcule le produit avec sa matrice transposée :

   $$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (On remarque que la transposée est la matrice de la rotation $R_{-\theta}$ et c'est bien l'inverse de $R_\theta$.) On en déduit que cette matrice est orthogonale.
   De même la matrice de $S_\theta$ est $\begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$. On peut là encore vérifier que le produit de cette matrice par sa transposée est égal à la matrice $I_2$. Cette matrice est donc orthogonale. (On remarque qu'étant symétrique, elle est égale à sa transposée. Cela est logique car une symétrie est égale à son application inverse.)

   *D'après ce qui a été dit au début de cette partie, l'ensemble $\mathcal{O}_2(\mathbf{R})$ est alors l'ensemble de toutes ces matrices.*

2. Fixons maintenant $n = 3$ et considérons la matrice orthogonale $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

   Notre objectif est de décrire l'isométrie de $\mathbf{R}^3$ correspondant à $A$.

   (a) Calculer $A^4$.

   On trouve $A^4 = I_3$.

   (b) Trouver un vecteur colonne $X_1 = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ <u>non nul</u> tel que $AX_1 = X_1$.

   Résoudre $AX_1 = X_1$ revient à résoudre le système $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{\sqrt{2}z}{2} & = & x \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{2}z}{2} & = & y \\ \frac{\sqrt{2}x}{2} - \frac{\sqrt{2}y}{2} & = & z \end{cases}$. Ce système a une infinité de solutions (leur ensemble forme une droite de $\mathbf{R}^3$). Une solution non nulle est par exemple $X_1 = (1, 1, 0)$.

   (c) Soient $X_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{smallmatrix}\right)$ et $X_3 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ +1 \\ \sqrt{2} \end{smallmatrix}\right)$.
   Vérifier que les vecteurs $X_1, X_2$ et $X_3$ sont deux à deux orthogonaux.

   On calcule les produits scalaires et on obtient $<X_1|X_2> = <X_1|X_3> = <X_2|X_3> = 0$. On a bien l'orthogonalité de ces trois vecteurs.

   (d) Calculer $AX_2$ et $AX_3$ et exprimer les résultats en fonction de $X_2$ et $X_3$.

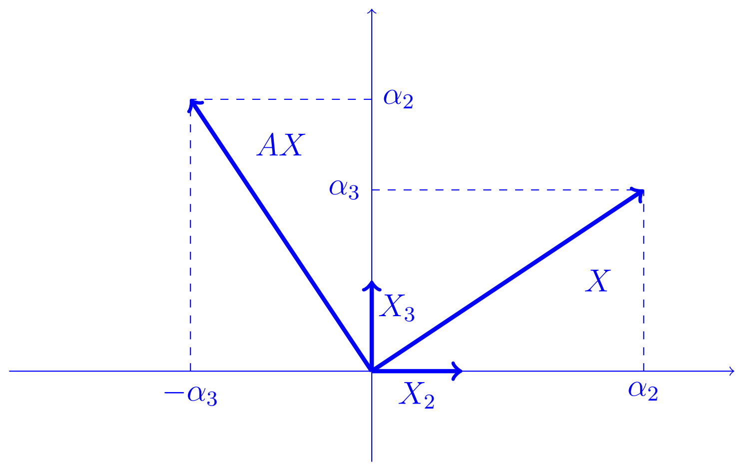
   On trouve $AX_2 = X_3$ et $AX_3 = -X_2$.

   (e) On se place dans le plan dirigé par les vecteurs $X_2$ et $X_3$. Tout vecteur $X$ de ce plan peut s'écrire sous la forme $\alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3$. Exprimer alors $AX$ en fonction de $X_2$ et $X_3$.

   On utilise simplement la distributivité du produit matriciel : $AX = A(\alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3) = \alpha_2 AX_2 + \alpha_3 AX_3 = \alpha_2 X_3 - \alpha_3 X_2$.

   (f) Toujours en se plaçant dans ce plan, représenter (de manière quelconque) le repère orthogonal donné par $X_2$ et $X_3$. Placer un vecteur $X$ quelconque. Représenter ses coordonnées $\alpha_2$ et $\alpha_3$ dans le repère et représenter le vecteur $AX$.
   Comment obtient-on géométriquement $AX$ à partir de $X$ ?

   Avant de tracer la figure, on rappelle que les vecteurs $X_2$ et $X_3$ sont orthogonaux et on remarque qu'ils sont de même norme. Le plan dirigé par ces vecteurs peut donc être représenté ainsi.




On reconnaît finalement que $AX$ est obtenu en faisant tourner le vecteur $X$ d'un angle $\frac{\pi}{2}$ dans ce plan.

(g) En tenant maintenant compte du vecteur $X_1$ laissé invariant par la multiplication par $A$, reconnaître l'isométrie de l'espace $\mathbf{R}^3$ représentée par la matrice $A$.

Le raisonnement est le même que ci-dessus. Tout vecteur de $\mathbf{R}^3$ possède des coordonnées dans le repère $(X_1, X_2, X_3)$. Comme $X_1$ est laissé invariant par la multiplication par $A$, sa coordonnée restera inchangée. Les coordonnées en $X_2$ et $X_3$ ont été étudiées ci-dessus. Finalement la multiplication par $A$ laisse l'axe dirigé par $X_1$ invariant et est une rotation dans le plan orthogonal à cet axe. L'isométrie correspondant à $A$ est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe dirigé par $X_1$ (c'est-à-dire de la droite d'équation $x = y$).

## III. Diagonalisation des matrices symétriques (4 pts)

On admet le théorème suivant.
Si $S \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est une matrice symétrique, alors il existe dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice orthogonale $P$ et une matrice diagonale $D$ telles que $S = PDP^{-1}$.
*Autrement dit, une matrice symétrique est toujours diagonalisable dans un repère orthonormé.*

1. Démontrer la réciproque de ce théorème.

   Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Supposons qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ et $D$ une matrice diagonale telles que $S = PDP^{-1}$. Montrons que $S$ est une matrice symétrique, *i.e.* ${}^tS = S$.
   On a ${}^tS = {}^t(PDP^{-1}) = {}^tP^{-1}{}^tP^{-1}$. Or $D$ est une matrice diagonale. En particulier elle est symétrique et ${}^tD = D$. De plus $P$ est orthogonale, donc $P^{-1} = {}^tP$ et ${}^tP^{-1} = {}^t({}^tP) = P$.
   Finalement ${}^tS = PDP^{-1}$, donc ${}^tS = S$ et $S$ est symétrique.

2. Soient $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Remarquer que $P \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ puis calculer $P^{-1}SP$. Commenter le résultat.

On trouve $P^{-1}SP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. C'est une matrice diagonale que l'on note $D$.

On en déduit $S = PDP^{-1}$. La matrice $P$ étant orthogonale, cela signifie qu'on a réussi à diagonaliser $S$ dans un repère orthonormé. On savait que cela était possible d'après le théorème.

3. En déduire que $S$ est une matrice inversible.

   Les coefficients diagonaux de $D$ étant non nuls, on sait que $D$ est inversible. Comme $P$ et $P^{-1}$ sont des matrices inversibles, le produit $PDP^{-1}$ est inversible. Donc $S$ est inversible.

4. Montrer que $(S^{-1})^n$ converge vers la matrice nulle quand $n$ tend vers $+\infty$.

   Plus précisément, $S^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$. Et on en déduit que pour tout $n$, $(S^{-1})^n = P(D^{-1})^n P^{-1}$.
   Or $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & & & \\ & 1/4 & & \\ & & -1/2 & \\ & & & -1/4 \end{pmatrix}$, donc $(D^{-1})^n = \begin{pmatrix} 1/2^n & & & \\ & 1/4^n & & \\ & & 1/(-2)^n & \\ & & & 1/(-4)^n \end{pmatrix}$. Les coefficients de $(D^{-1})^n$ convergent tous vers 0, donc $(D^{-1})^n$ converge vers la matrice nulle. On en déduit que $(S^{-1})^n$ converge également vers la matrice nulle.