Devoir final

Calculatrice et documents sont interdits.
Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.
Le barême est donné à titre indicatif : 15 - 6.

Exercice 1

Notons $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices de taille 2 à coefficients dans $\mathbf{K}$ où $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et on note $\mathcal{G}l_2(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. On rappelle que $(\mathcal{G}l_2(\mathbf{K}), \times)$ est un groupe. Notons enfin I_2 la matrice identité.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. On appelle **déterminant** de A le nombre réel défini par

$$\det(A) = ad - bc.$$

1. **Propriétés du déterminant**

   (a) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. Montrer que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

   (b) Soit $A \in \mathcal{G}l_2(\mathbf{K})$. Déduire de la question précédente l'expression de $\det(A^{-1})$ en fonction de $\det(A)$.

   (c) En déduire que si une matrice est inversible, alors son déterminant est non nul.

   (d) Que peut-on dire de l'application $\det : \mathcal{G}l_2(\mathbf{K}) \to \mathbf{K}^*$?

   (e) Soit $P \in \mathcal{G}l_2(\mathbf{K})$ et $D \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. Montrer que $\det(PDP^{-1}) = \det(D)$.

2. **Racines de la matrice identité**

   Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telle que $A^n = I_2$.

   (a) Montrer que $A \in \mathcal{G}l_2(\mathbf{R})$.

   (b) Que vaut le déterminant de A ?

   Dans la suite, on suppose qu'on peut diagonaliser A dans l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ des matrices à coefficients complexes : il existe des matrices P et D de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ telles que P est une matrice inversible, D est une matrice diagonale et $A = PDP^{-1}$.

   (c) Montrer que $D^n = I_2$.

   (d) En déduire les valeurs complexes que peuvent prendre les coefficients diagonaux de D.

   (e) D'après les questions 1-e, 2-b et 2-d, combien y a-t-il de matrices D possibles ?
   On distinguera deux cas selon la parité de n.

3. **Un exemple**

   Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Trouver le plus petit entier $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $A^n = I_2$.

   (b) Soit $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^2$.
   Déterminer le nombre complexe α tel que $AX = \alpha X$.

   (c) Soit $\bar{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^2$. Calculer $A\bar{X}$.

   (d) Soit $P \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ la matrice dont les colonnes sont les vecteurs X et $\bar{X}$ dans cet ordre et soit $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$.
   Justifier que P est inversible et calculer PDP^{-1}.
   La matrice D est-elle conforme à ce qui a été vu dans la partie 2 ?

   (e) Proposer un exemple non trivial de matrice A à coefficients réels telle que $A^6 = I_2$.
   Indication : on peut par exemple penser à une certaine transformation du plan.

Exercice 2 : dés pipés

On considère deux dés à 6 faces, éventuellement pipés : un bleu et un rouge. Leurs faces sont numérotées de 0 à 5 (pour simplifier les notations). Pour $i \in \{0,1,2,3,4,5\}$, on note $p_i \in]0,1[$ (respectivement q_i) la probabilité que le dé bleu (respectivement rouge) ait pour résultat i.

On lance les deux dés et on regarde la somme des deux résultats. Les résultats possibles sont les entiers compris entre 0 et 10 et un raisonnement simple de probabilités permet de démontrer que pour tout nombre entier $k \in [\![0, 10]\!]$, la probabilité que la somme vaille k est

$$r_k = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{k} p_i q_{k-i} & \text{si } k \leqslant 5 \\ \displaystyle\sum_{i=k-5}^{5} p_i q_{k-i} & \text{si } k \geqslant 5 \end{cases}$$

1. On suppose dans cette question les dés non pipés : les 6 valeurs prises par chaque dé ont la même probabilité $\frac{1}{6}$ de sortir.
   Calculer alors les probabilités r_k des 11 valeurs possibles de la somme des deux résultats.

   La suite du problème a pour objectif de répondre à la question suivante : est-il possible de piper les dés, c'est-à-dire de choisir les 12 probabilités p_i et q_j, de façon à ce que les 11 valeurs possibles de la somme soient équiprobables ?

   On définit les polynômes P et Q de $\mathbf{C}[X]$ par $P = \sum_{i=0}^{5} p_i X^i$ et $Q = \sum_{j=0}^{5} q_j X^j$.
   On pose de plus $R = PQ$.

2. Montrer que $R = \sum_{k=0}^{10} r_k X^k$.

3. Justifier le fait que P et Q ont chacun au moins une racine réelle.

4. Supposons que pour tout nombre entier $k \in [\![0, 10]\!]$, $r_k = \frac{1}{11}$.
   Déterminer alors les racines de R dans $\mathbf{C}$.

5. Conclure.