

## CORRIGÉ DU DEVOIR FINAL

**Exercice 1**

Soit  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ . Notons  $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$  l'ensemble des matrices de taille 2 à coefficients dans  $\mathbf{K}$  et  $\mathcal{GL}_2(\mathbf{K})$  l'ensemble des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ . On rappelle que  $(\mathcal{GL}_2(\mathbf{K}), \times)$  est un groupe. Notons enfin  $I_2$  la matrice identité.

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ . On appelle **déterminant** de  $A$  le nombre réel défini par

$$\det(A) = ad - bc.$$

**1. Propriétés du déterminant**

- (a) Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ . Montrer que  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ .

Posons  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$  deux matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ . Alors  $AB = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$  et  $\det(AB) = (aa' + bc')(cb' + dd') - (ca' + dc')(ab' + bd') = aa'dd' + bb'cc' - a'bcd' - ab'c'd$ .

D'autre part  $\det(A)\det(B) = (ad - bc)(a'd' - b'c') = aa'dd' + bb'cc' - a'bcd' - ab'c'd$ .  
On obtient bien  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ .

- (b) Soit  $A \in \mathcal{GL}_2(\mathbf{K})$ . Dédurre de la question précédente l'expression de  $\det(A^{-1})$  en fonction de  $\det(A)$ .

Commençons par remarquer que  $\det(I_2) = 1$ . Appliquons ensuite la formule précédente à  $A$  et  $A^{-1}$  :  $\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$ . Donc  $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(I_2) = 1$  et  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ .

- (c) En déduire que si une matrice est inversible, alors son déterminant est non nul.

On remarque en particulier que la formule  $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$  implique que  $\det(A)$  et  $\det(A^{-1})$  sont non nuls. Ainsi, si une matrice est inversible, son déterminant est non nul.

- (d) Que peut-on dire de l'application  $\det : \mathcal{GL}_2(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K}^*$  ?

On a démontré que l'application  $\det$  définie sur  $\mathcal{GL}_2(\mathbf{K})$  est bien à valeurs dans  $\mathbf{K}^*$ . D'après la question (a), on peut affirmer que c'est un morphisme de groupe de  $(\mathcal{GL}_2(\mathbf{K}), \times)$  vers  $(\mathbf{K}^*, \times)$ .

On peut également démontrer que cette application est surjective mais non injective. En effet, pour tout  $x \in \mathbf{K}^*$  il existe une matrice dont le déterminant est  $x$  ; par exemple la matrice  $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Et deux matrices distinctes peuvent avoir le même

déterminant ; par exemple  $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ .

(e) Soit  $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbf{K})$  et  $D \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ . Montrer que  $\det(PDP^{-1}) = \det(D)$ .

Appliquons les formules obtenues :

$\det(PDP^{-1}) = \det(P) \det(D) \det(P^{-1}) = \det(P) \det(D) \frac{1}{\det(P)}$ . Ce produit est dans  $\mathbf{K}$  et est donc commutatif :  $\det(PDP^{-1}) = \det(D) \frac{\det(P)}{\det(P)} = \det(D)$ .

## 2. Racines de la matrice identité

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$  et soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$  telle que  $A^n = I_2$ .

(a) Montrer que  $A \in \mathcal{GL}_2(\mathbf{R})$ .

On a  $A \times A^{n-1} = I_2$  avec  $n-1 \geq 0$ . On peut en déduire que  $A$  est inversible et que  $A^{-1} = A^{n-1}$ .

(b) Que vaut le déterminant de  $A$  ?

Comme  $A^n = I_2$ ,  $\det(A^n) = \det(I_2)$ . Donc  $\det(A)^n = 1$ . Or  $\det(A) \in \mathbf{R}$ . Donc, si  $n$  est impair, on déduit  $\det(A) = 1$ . Et si  $n$  est pair, on déduit  $\det(A) = \pm 1$ .

Dans la suite, on suppose qu'on peut diagonaliser  $A$  dans l'ensemble  $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$  des matrices à coefficients complexes : il existe des matrices  $P$  et  $D$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$  telles que  $P$  est une matrice inversible,  $D$  est une matrice diagonale et  $A = PDP^{-1}$ .

(c) Montrer que  $D^n = I_2$ .

On a  $A^n = I_2$ , donc  $(PDP^{-1})^n = I_2$ . Donc en développant,  $PDP^{-1}PDP^{-1}PD \dots DP^{-1}PDP^{-1} = PD^nP^{-1} = I_2$ . En multipliant à gauche par  $P^{-1}$  et à droite par  $P$ , on obtient  $D^n = P^{-1}I_2P = P^{-1}P = I_2$ .

(d) En déduire les valeurs complexes que peuvent prendre les coefficients diagonaux de  $D$ .

Notons  $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ . Alors  $D^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} = I_2$ . On en déduit  $\lambda^n = \mu^n = 1$ . Ainsi  $\lambda$  et  $\mu$  sont des racines  $n$ -ièmes de 1 dans  $\mathbf{C}$ . On en déduit que  $\lambda$  et  $\mu$  sont des nombres complexes de la forme  $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ , où  $k$  est un nombre entier.

(e) D'après les questions 1-e, 2-b et 2-d, combien y a-t-il de matrices  $D$  possibles ?

*On distinguera deux cas selon la parité de  $n$ .*

D'après la question 1-e,  $\det(D) = \det(A)$ . Or  $\det(A) = \pm 1$ , donc  $\det(D) = \lambda\mu = \pm 1$ . On en déduit que si  $\lambda = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ , alors  $\mu = \pm e^{-\frac{2ik\pi}{n}}$ .

Plus précisément, si  $n$  est impair, alors  $\det(D) = \det(A) = 1$ . Il y a  $n$  racines  $n$ -ièmes de 1. Il y a donc  $n$  valeurs possibles pour  $\lambda$  et la valeur de  $\mu$  est directement imposée par celle de  $\lambda$ . Il y a donc  $n$  matrices  $D$  possibles. Ce sont les matrices de la forme

$\begin{pmatrix} e^{\frac{2ik\pi}{n}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2ik\pi}{n}} \end{pmatrix}$  avec  $k = 0, \dots, n-1$ .

Si  $n$  est pair, il y a toujours  $n$  valeurs possibles pour  $\lambda$ , mais il y a en revanche deux choix possibles pour  $\mu$  en fonction de la valeur de  $\lambda$ . Cela fait  $2n$  matrices  $D$

possibles :  $\begin{pmatrix} e^{\frac{2ik\pi}{n}} & 0 \\ 0 & \pm e^{-\frac{2ik\pi}{n}} \end{pmatrix}$  avec  $k = 0, \dots, n-1$ .

### 3. Un exemple

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

- (a) Trouver le plus petit entier  $n \in \mathbf{N}^*$  tel que  $A^n = I_2$ .

On calcule  $A^2$ ,  $A^3$  et  $A^4 = I_2$ , donc  $n = 4$ .

- (b) Soit  $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^2$ .

Déterminer le nombre complexe  $\alpha$  tel que  $AX = \alpha X$ .

On obtient  $AX = iX$ .

- (c) Soit  $\bar{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^2$ . Calculer  $A\bar{X}$ .

On obtient  $A\bar{X} = -i\bar{X}$ .

- (d) Soit  $P \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$  la matrice dont les colonnes sont les vecteurs  $X$  et  $\bar{X}$  dans cet ordre et soit  $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ .

Justifier que  $P$  est inversible et calculer  $PDP^{-1}$ .

La matrice  $D$  est-elle conforme à ce qui a été vu dans la partie 2 ?

$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}$ . On peut utiliser l'algorithme d'inversion pour montrer que

$P$  est inversible et obtenir son inverse :  $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1-i & 2i \\ -1+i & -2i \end{pmatrix}$ . Puis on calcule  $PDP^{-1}$  et on obtient  $PDP^{-1} = A$ .

On peut également utiliser le critère d'inversibilité des matrices donné par le déterminant : on a démontré que si une matrice est inversible, alors son déterminant est non nul. On sait (d'après un exercice de TD) que la réciproque est vraie. Ici  $\det(P) = 4i \neq 0$ , donc  $P$  est inversible. D'autre part, le calcul de  $AP$  revient à multiplier  $A$  par les colonnes de  $P$ . On obtient  $AP = A(X|\bar{X}) = (AX|A\bar{X}) = (\alpha X|\bar{\alpha}\bar{X})$ . Or cette dernière matrice est le résultat du produit  $PD$ . Ainsi  $AP = PD$ . Donc  $A = PDP^{-1}$ .

- (e) Proposer un exemple non trivial de matrice  $A$  à coefficients réels telle que  $A^6 = I_2$ .

*Indication : on peut par exemple penser à une certaine transformation du plan.*

Considérons la rotation  $R_{\frac{2\pi}{6}}$  de centre  $O$  et d'angle  $\frac{2\pi}{6}$ . Si on l'applique 6 fois, on obtient la rotation d'angle  $2\pi$ , c'est-à-dire l'identité :  $R_{\frac{2\pi}{6}}^6 = id$ . Or cette rotation est une

application linéaire dont la matrice est  $R_{\frac{2\pi}{6}} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{6}) & \sin(\frac{2\pi}{6}) \\ -\sin(\frac{2\pi}{6}) & \cos(\frac{2\pi}{6}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .

On a naturellement  $R_{\frac{2\pi}{6}}^6 = I_2$ .

### Exercice 2 : dés pipés

On considère deux dés à 6 faces, éventuellement pipés : un bleu et un rouge. Leurs faces sont numérotées de 0 à 5 (pour simplifier les notations). Pour  $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ , on note  $p_i \in ]0, 1[$

(respectivement  $q_i$ ) la probabilité que le dé bleu (respectivement rouge) ait pour résultat  $i$ .

On lance les deux dés et on regarde la somme des deux résultats. Les résultats possibles sont les entiers compris entre 0 et 10 et un raisonnement simple de probabilités permet de démontrer que pour tout nombre entier  $k \in \llbracket 0, 10 \rrbracket$ , la probabilité que la somme vaille  $k$  est

$$r_k = \begin{cases} \sum_{i=0}^k p_i q_{k-i} & \text{si } k \leq 5 \\ \sum_{i=k-5}^5 p_i q_{k-i} & \text{si } k \geq 5 \end{cases}$$

1. On suppose dans cette question les dés non pipés : les 6 valeurs prises par chaque dé ont la même probabilité  $\frac{1}{6}$  de sortir.  
Calculer alors les probabilités  $r_k$  des 11 valeurs possibles de la somme des deux résultats.

On utilise les formules données avec  $p_i = q_i = 1/6$  pour tout  $i$ . Ainsi  $r_0 = p_0 q_0 = \frac{1}{36}$ ,  $r_1 = p_0 q_1 + p_1 q_0 = \frac{2}{36}$ ,  $r_2 = p_0 q_2 + p_1 q_1 + p_2 q_0 = \frac{3}{36}$ . De manière générale,  $r_k$  est donné par le nombre de termes de la somme le définissant multiplié par  $\frac{1}{36}$ . On obtient  $r_3 = \frac{4}{36}$ ,  $r_4 = \frac{5}{36}$ ,  $r_5 = p_1 q_6 + \dots + p_6 q_1 = \frac{6}{36}$ ,  $r_6 = \frac{5}{36}$ ,  $r_7 = \frac{4}{36}$ ,  $r_8 = \frac{3}{36}$ ,  $r_9 = \frac{2}{36}$ ,  $r_{10} = p_6 q_6 = \frac{1}{36}$ .

La suite du problème a pour objectif de répondre à la question suivante : est-il possible de piper les dés, c'est-à-dire de choisir les 12 probabilités  $p_i$  et  $q_j$ , de façon à ce que les 11 valeurs possibles de la somme soient équiprobables ?

On définit les polynômes  $P$  et  $Q$  de  $\mathbf{C}[X]$  par  $P = \sum_{i=0}^5 p_i X^i$  et  $Q = \sum_{j=0}^5 q_j X^j$ .  
On pose de plus  $R = PQ$ .

2. Montrer que  $R = \sum_{k=0}^{10} r_k X^k$ .

On peut se contenter de développer le produit  $PQ$ , de regrouper les termes de même degré et de reconnaître les expressions des  $r_k$ . Formellement cela s'écrit ainsi. On utilise la définition du produit de deux polynômes : si  $A = \sum_k a_k X^k$ ,  $B = \sum_k b_k X^k$ , alors  $C = AB = \sum_k c_k X^k$  avec pour tout  $k$ ,  $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$ . Ici, comme  $P$  et  $Q$  sont de degré 5,  $R$  est de degré 10 et pour tout  $k \leq 10$  on obtient que le coefficient  $c_k$  du terme  $X^k$  de  $R$  est  $c_k = \sum_{i=0}^k p_i q_{k-i}$  en considérant que  $p_j$  et  $q_j$  sont nuls pour  $j > 5$ . Si  $k \leq 5$ , on reconnaît exactement l'expression de  $r_k$ . Si  $k \geq 5$ , les  $p_j$  sont nuls à partir de  $j = 6$  et les  $q_{k-j}$  sont nuls pour  $j < k - 5$ , donc  $c_k = \sum_{j=k-5}^5 p_j q_{k-j}$ . On reconnaît encore l'expression de  $r_k$ . Dans tous les cas on obtient  $c_k = r_k$  et donc  $R = \sum_{k=0}^{10} r_k X^k$ .

3. Justifier le fait que  $P$  et  $Q$  ont chacun au moins une racine réelle.

$P$  et  $Q$  sont des polynômes de degré 5 ( $p_5$  et  $q_5$  sont non nuls). Comme ils sont de degré impair, ils admettent au moins une racine dans  $\mathbf{R}$ .

4. Supposons que pour tout entier  $k \in \llbracket 0, 10 \rrbracket$ ,  $r_k = \frac{1}{11}$ .  
Déterminer alors les racines de  $R$  dans  $\mathbf{C}$ .

D'après l'hypothèse faite,  $R = \frac{1}{11}(1 + X + X^2 + \dots + X^{10})$ . On reconnaît une somme géométrique. Donc  $11(X - 1)R = (X - 1)(1 + X + \dots + X^{10}) = X^{11} - 1$ . Or les racines de ce polynôme sont les racines onzièmes de l'unité. Donc les racines de  $R$  sont les racines onzièmes de 1, 1 exclus. Ce sont les nombres  $e^{\frac{2ik\pi}{11}}$  avec  $k = 1, \dots, 10$ .

5. Conclure.

Si tous les  $p_i$  et  $q_j$  sont égaux à  $\frac{1}{11}$ , on a vu que les racines de  $R$  sont les racines onzièmes de 1, 1 exclus. En particulier, ces racines sont toutes imaginaires. Or  $R = PQ$  et  $P$  et  $Q$  ont tous les deux au moins une racine réelle. Donc  $R$  a au moins deux racines réelles (éventuellement une racine réelle double). On obtient donc une contradiction. Cela signifie que l'hypothèse faite sur les  $p_i$  et  $q_j$  est impossible. On ne peut donc pas piper les dés de manière à ce que tous les résultats possibles du jeu étudié soient équiprobables.