Contrôle 3

Documents et calculatrices sont interdits.
Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.

Exercice 1 Soit P un polynôme de la forme $P = X^3 + pX + q$ où p et q sont des nombres réels (voire complexes). La méthode de Cardan pour déterminer les racines de P est la suivante.

- On détermine les racines A et B du polynôme $X^2 + qX - \frac{p^3}{27}$.
- On calcule les racines cubiques a_1, a_2, a_3 de A et b_1, b_2, b_3 de B.
- Les racines de P sont alors les nombres complexes $a_i + b_j$ tels que $a_i b_j = -\frac{p}{3}$.

Déterminer à l'aide de cette méthode les racines du polynôme

$$P = X^3 - 3X + 1.$$

Vérifier pour l'une des solutions obtenues qu'il s'agit bien d'une racine de P.

Exercice 2

Soit $(G, \cdot)$ un groupe d'élément neutre e. Pour x dans G, on note C_x l'ensemble des éléments de G qui commutent avec x :

$$C_x = \{y \in G \mid xy = yx\}.$$

1. Déterminer C_e.
2. Soit $x \in G$. Montrer que C_x est un sous-groupe de G.
3. Montrer que le sous-groupe engendré par x est inclus dans C_x.
4. Soit p un nombre premier. On suppose que G est de cardinal fini p. Soit $x \in G$. Déterminer C_x et en déduire que $(G, \cdot)$ est un groupe commutatif.
5. Dans le groupe $(\mathfrak{S}_3, \circ)$ déterminer C_σ où σ désigne la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
6. Bonus : Soit $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_4$. Montrer que $C_\tau = <\tau>$.