Contrôle 3

Calculatrice et documents sont interdits.
Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.
Le barème est donné à titre indicatif : 5 - 15.

Exercice 1 : application bijective **(5 points)**

$$\text{Soit } f : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}_+^* & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & (\ln(x))^2 + 3 \end{array}$$

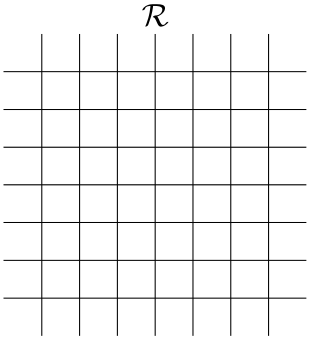
1. L'application f est-elle injective ?
2. Déterminer l'image $f(\mathbf{R}_+^*)$ de f.
3. Donner des nombres a et b tels que la restriction $\tilde{f} : [a, +\infty[\to [b, +\infty[$ de f soit bijective.
4. Déterminer la bijection réciproque de $\tilde{f}$.

Exercice 2 : application conforme

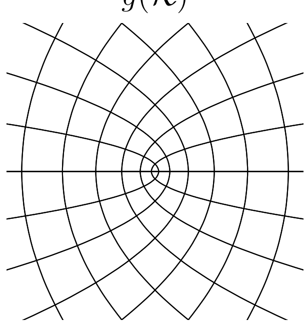
Soit $\varphi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ une application du plan complexe. On dit qu'elle est **conforme** si elle conserve localement les angles. Cela signifie que si deux courbes C et $\tilde{C}$ s'intersectent en formant un angle θ[1], alors leurs images $\varphi(C)$ et $\varphi(\tilde{C})$ par φ sont des courbes qui s'intersectent en formant le même angle θ.

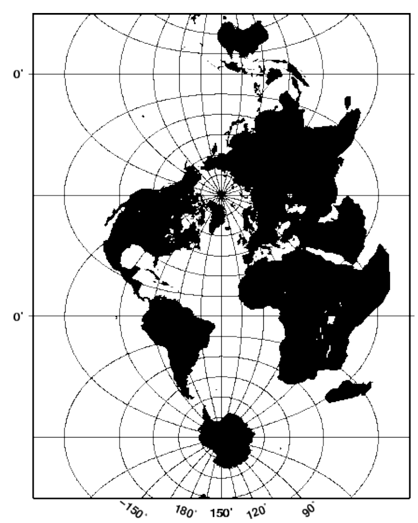
Soit g l'application complexe définie par : $\boxed{g(z) = z^2}$.
Nous allons montrer que g est conforme. Pour bien comprendre notre définition, nous donnons ci-dessous un ensemble $\mathcal{R}$ formé de droites orthogonales du plan et son image par g. On observe bien que toutes les courbes de l'image (des paraboles) s'intersectent perpendiculairement : les angles ont été localement conservés.

$\mathcal{R}$



$g(\mathcal{R})$





Représentation conforme de la terre (projection de Mercator transverse) ; cela n'a rien à voir avec ce problème.

1. Pour être précis, l'angle formé par deux courbes en leur point d'intersection est, par définition, l'angle formé par leurs tangentes en ce point.

1. **Localement ou globalement ?** **(4 points)**

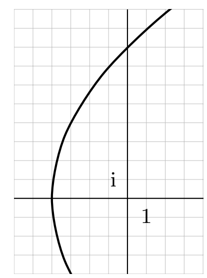
   (a) Déterminer les écritures polaires des quatre nombres complexes suivants : $2\mathrm{i}$, $1+\mathrm{i}$, $-4+4\mathrm{i}$ et $2+4\mathrm{i}$.

   (b) Soient A, B et C d'affixes $z_A = 2+\mathrm{i}$, $z_B = 1$ et $z_C = 1+2\mathrm{i}$.
   Calculer l'angle $\widehat{ABC}$ ainsi que l'angle $\widehat{g(A)g(B)g(C)}$ formé par leurs images par g. L'angle est-il conservé ?
   C'est le sens du mot localement *dans notre définition. L'application ne conserve pas* globalement *tous les angles.*

2. **Trois courbes et leurs images** **(6 points)**

   (a) Soit $\mathcal{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon 2. Donner l'écriture polaire d'un élément z_1 de $\mathcal{C}_1$.

   (b) Calculer $g(z_1)$ et en déduire l'image $g(\mathcal{C}_1)$ du cercle $\mathcal{C}_1$.

   (c) Soit $\mathcal{C}_2 = \{x+2\mathrm{i}\ ;\ x \in \mathbf{R}\}$. Montrer que l'image par g de tout point de $\mathcal{C}_2$ est de la forme $X+\mathrm{i}Y$ avec $X = \frac{1}{16}Y^2 - 4$.
   On reconnaît l'équation d'une parabole que nous représentons ci-contre.

   (d) Soit $y \in \mathbf{R}_+$. Déterminer les antécédents par g de $\mathrm{i}y$.

   (e) En déduire l'image réciproque $\mathcal{C}_3 = g^{-1}(\mathrm{i}\mathbf{R}_+)$.

   (f) Représenter les ensembles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$. Quels sont les angles formés par leurs intersections ?

   (g) Représenter sur une autre figure leurs images $g(\mathcal{C}_1)$, $g(\mathcal{C}_2)$ et $g(\mathcal{C}_3)$. Les angles ont-ils été conservés ?

3. **Une démonstration** **(5 points)**

   Nous étudions dans cette partie l'argument principal permettant de montrer que g est conforme.
   L'angle formé par deux courbes à leur intersection I se mesure en considérant sur chaque courbe un point infiniment proche de I et en mesurant l'angle que ces deux points forment avec I. Mathématiquement, cela nécessite d'utiliser un passage à la limite.

   (a) Soient $z_B \in \mathbf{C}^*$, $r \in \mathbf{R}_+^*$, $\alpha \in \mathbf{R}$ et $\beta \in \mathbf{R}$.
   Représenter dans le plan les points B, A et C d'affixes respectives z_B, $z_A = z_B + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ et $z_C = z_B + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$. *On fera bien apparaître les paramètres sur la figure.*

   (b) Que vaut l'angle $\widehat{ABC}$? *On constate qu'il ne dépend pas de r.*

   (c) Calculer et simplifier $\dfrac{g(z_C)-g(z_B)}{g(z_A)-g(z_B)}$. Qu'obtient-on lorsque l'on fait tendre r vers 0 ?

   (d) En déduire que, lorsque r tend vers 0, l'angle formé par les images $g(A)$, $g(B)$ et $g(C)$ est le même que celui formé par A, B et C.

   (e) Le raisonnement précédent n'est pas valable si $z_B = 0$. Notre application g est bien conforme sur $\mathbf{C}^*$ mais elle ne l'est pas en 0.
   Donner deux courbes s'intersectant en 0, et vérifier que g ne conserve pas leur angle.