Contrôle 3

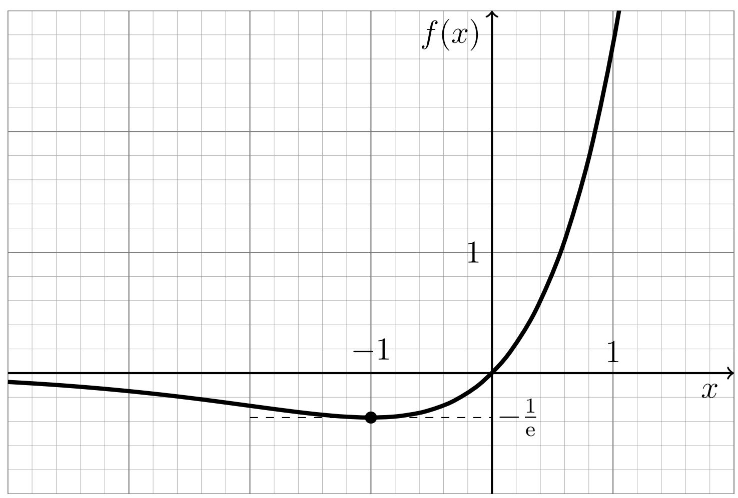
Calculatrice et documents sont interdits.
Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.
Durée de l'épreuve : 1h30.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : Fonction de Lambert (12 points)

On s'intéresse à la fonction f définie de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ par : $\boxed{f(x) = x\mathrm{e}^x}$.
De nombreux problèmes peuvent se ramener à cette fonction et se résoudre à l'aide de sa réciproque (à préciser) appelée fonction de Lambert.

Nous donnons le graphe de f sur $[-4, 2]$, il est représentatif de l'allure générale de f.

1. **Étude de f**
   (a) Exprimer $f(\ln(2))$, $f(\ln(\frac{1}{2}))$ et $f(\ln(\frac{1}{4}))$ en fonction de $\ln(2)$.
   (b) La fonction f est-elle injective ?
   (c) D'après le graphe, est-elle surjective ?
   (d) En s'appuyant sur le graphe, donner les valeurs de a et b minimales telles que f définisse une bijection de $[a, +\infty[$ vers $[b, +\infty[$.



2. **Première application**
   Considérons l'équation : $\mathrm{e}^x = 5x$.
   (a) Montrer que cette équation est équivalente à : $f(-x) = -\frac{1}{5}$.
   (b) À l'aide du graphe, estimer grossièrement les solutions de l'équation.
   (c) Recommencer avec l'équation : $\mathrm{e}^{3x} = 5x$.

3. **Seconde application**
   Nous considérons l'application g définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par : $g(x) = x^x$.
   (a) Montrer que : $g = \exp \circ f \circ \ln$.
   (b) L'application g est-elle injective ?
   (c) On note f^{-1} la bijection réciproque de f associée aux intervalles de la question 1-d. Montrer que g définit une bijection de $[\mathrm{e}^a, +\infty]$ vers $[\mathrm{e}^b, +\infty]$, et exprimer sa bijection réciproque g^{-1} en fonction de f^{-1}.
   (d) Déterminer $g^{-1}(4)$ en utilisant cette expression et de la question 1-(a).

Exercice 2 : Triangles semblables **(12 points)**

1. **Une équation complexe**

   On considère l'équation (E) d'inconnue $z \in \mathbf{C}$ liant son carré et son conjugué : $z^2 = \overline{z}$.

   (a) Résoudre cette équation sous forme algébrique en posant $z = x + \mathrm{i}y$.
   Indication : on doit trouver quatre solutions.

   (b) Résoudre à nouveau cette équation sous forme polaire en posant $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
   Indication : il serait surprenant de ne pas trouver les mêmes solutions qu'à la question (a).

2. **Une transformation géométrique**

   Considérons l'application φ définie sur $\mathbf{C}$ par :

$$\varphi(z) = \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} z + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}.$$

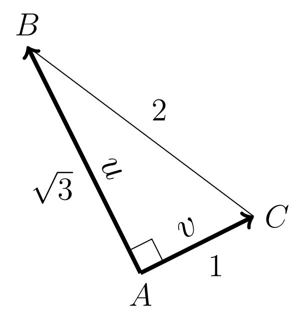
   (a) Écrire φ comme une composée de transformations élémentaires : translation, rotation, homothétie...

   (b) En déduire que φ est une bijection de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{C}$ et déterminer sa bijection réciproque.

   (c) Vérifier que pour $\theta \in \mathbf{R}$, $\quad \varphi^{-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \sin(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$.
   Indication : utiliser une formule d'Euler.

3. **Un triangle**

   On considère le triangle rectangle ABC représenté ci-contre. Nous notons u et v les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.



   (a) En raisonnant sur le module et l'argument, justifier que $\dfrac{u}{v} = \mathrm{i}\sqrt{3}$.

   (b) Soit $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ un nombre complexe quelconque. Représenter dans le plan complexe le point $\tilde{A}$ d'affixe z ainsi que les points $\tilde{B}$ et $\tilde{C}$ d'affixes respectives $\overline{z}$ et z^2.

   Le problème est le suivant : nous souhaitons trouver les nombres z pour lesquels le triangle $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ est semblable à notre triangle ABC (mêmes proportions et même orientation). D'après la question (a), cela revient à satisfaire l'égalité :

$$\frac{\overline{z} - z}{z^2 - z} = \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

   (c) Montrer que cette équation est équivalente à dire que $z \notin \{0, 1\}$ et :

$$\left(\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} z + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = \sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \overline{z} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}.$$

   (d) En déduire que z est solution de ce problème si et seulement si $\varphi(z)$ est solution de l'équation (E) de la question 1.

   (e) Conclure.