Contrôle 3

Calculatrice et documents sont interdits.
Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.
Durée de l'épreuve : 1h30.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : Fonction de Lambert (12 points)

On s'intéresse à la fonction f définie de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ par : $\boxed{f(x) = x\mathrm{e}^x}$.
De nombreux problèmes peuvent se ramener à cette fonction et se résoudre à l'aide de sa réciproque (à préciser) appelée fonction de Lambert.

Nous donnons le graphe de f sur $[-4, 2]$, il est représentatif de l'allure générale de f.

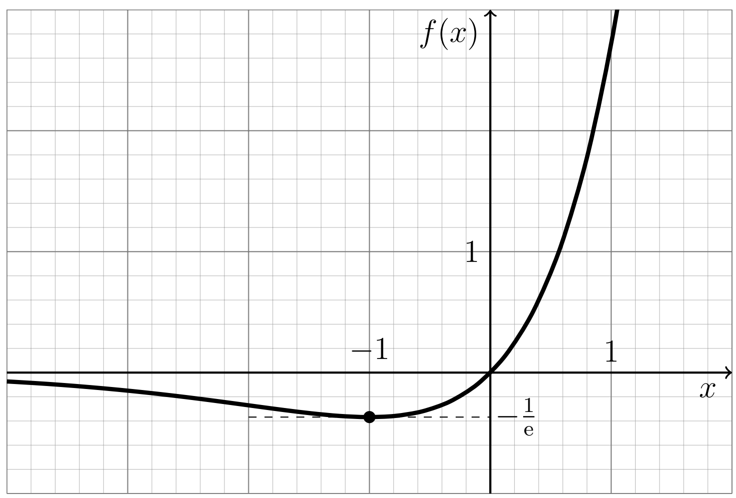
1. **Étude de f**

   (a) Exprimer $f(\ln(2))$, $f(\ln(\frac{1}{2}))$ et $f(\ln(\frac{1}{4}))$ en fonction de $\ln(2)$.

   (b) La fonction f est-elle injective ?

   (c) D'après le graphe, est-elle surjective ?

   (d) En s'appuyant sur le graphe, donner les valeurs de a et b minimales telles que f définisse une bijection de $[a, +\infty[$ vers $[b, +\infty[$.



   (a) Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$. Alors $f(\ln(a)) = \ln(a)\mathrm{e}^{\ln(a)} = a\ln(a)$. Donc $f(\ln(2)) = 2\ln(2)$, $f(\ln(\frac{1}{2})) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}\ln(2)$ et $f(\ln(\frac{1}{4})) = \frac{1}{4}\ln(\frac{1}{4}) = -\frac{1}{4}\ln(4) = -\frac{1}{2}\ln(2)$.

   (b) D'après la question précédente, $f(\ln(\frac{1}{2})) = f(\ln(\frac{1}{4}))$ alors que $\ln(\frac{1}{2}) \neq \ln(\frac{1}{4})$ (la fonction ln est strictement croissante donc injective). Donc f n'est pas injective.

   Graphiquement, on constate en effet que toutes les valeurs comprises strictement entre $-\frac{1}{\mathrm{e}}$ et 0 sont prises deux fois par la fonction f.

   (c) D'après le graphe, la fonction f possède une valeur minimale $\frac{1}{\mathrm{e}}$. Donc en particulier : $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) \neq -1$. la fonction f n'est pas surjective.

   (d) On constate que f est continue est strictement croissante sur l'intervalle $[-1, +\infty[$. Elle est donc injective (par monotonie) sur cet intervalle. Or, toujours graphiquement, $f([-1, +\infty[) = [-\frac{1}{\mathrm{e}}, +\infty[$. Donc f surjective pour ces intervalles. Ainsi, f définit une bijection de $[-1, +\infty[$ vers $[-\frac{1}{\mathrm{e}}, +\infty[$.

   Nous ne pouvons pas trouver d'intervalle plus grand car nous retrouverions le problème de non injectivité de f.

2. **Première application**

   Considérons l'équation : $\mathrm{e}^x = 5x$.

(a) Montrer que cette équation est équivalente à : $f(-x) = -\frac{1}{5}$.

Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors en manipulant simplement l'équation :

$$\mathrm{e}^x = 5x \text{ ssi } 1 = 5x\mathrm{e}{-x} \text{ ssi } -\frac{1}{5} = -x\mathrm{e}^{-x} \text{ ssi } -\frac{1}{5} = f(-x).$$

(b) À l'aide du graphe, estimer grossièrement les solutions de l'équation.

Nous déduisons de ce qui précède que x est solution de l'équation ssi $-x$ est un antécédent de $-\frac{1}{5}$ par f. Graphiquement, les antécédents de $-\frac{1}{5}$ se lisent en traçant la droite horizontale d'équation $y = -\frac{1}{5}$. Elle intersecte la courbe de f en $x_1 \approx -0,3$ et en $x_2 \approx -2,5$. Donc $-x = x_1$ ou $-x = x_2$. Les solutions de l'équation sont approximativement : $0,3$ et $2,5$.

(c) Recommencer avec l'équation : $\mathrm{e}^{3x} = 5x$.

Le même raisonnement permet de montrer que cette équation est équivalente à $f(-3x) = -\frac{3}{5}$. Or graphiquement, nous observons que $-\frac{3}{5}$ n'admet pas d'antécédent par f donc cette équation n'admet pas de solution.

3. **Seconde application**

Nous considérons l'application g définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par : $g(x) = x^x$.

(a) Montrer que : $g = \exp \circ f \circ \ln$.

Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. Alors (comme dans la question 1-(a)) : $\exp(f(\ln(x))) = \exp(x\ln(x)) = x^x$. (Rappelons que $a^b = \mathrm{e}^{b\ln(a)}$.)

(b) L'application g est-elle injective ?

Comme f n'est pas injective, il y a des chances que g ne le soit pas non plus. Les exemples de la question 1-(a) le montrent bien :

$$g(\frac{1}{2}) = \exp(f(\ln(\frac{1}{2}))) = \exp(f(\ln(\frac{1}{4}))) = g(\frac{1}{4}).$$

Donc g n'est pas injective.

(c) On note f^{-1} la bijection réciproque de f associée aux intervalles de la question 1-d. Montrer que g définit une bijection de $[\mathrm{e}^a, +\infty]$ vers $[\mathrm{e}^b, +\infty]$, et exprimer sa bijection réciproque g^{-1} en fonction de f^{-1}.

Nous prenons $a = -1$ et $b = -\frac{1}{\mathrm{e}}$ d'après la question 1-(d). La fonction g est la composée de trois applications bijectives, pour peu qu'on les considère sur de bons intervalles : $g = \exp \circ f \circ \ln$. La fonction ln est strictement croissante et continue ; elle établit une bijection entre les intervalles $[\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$ et $[-1, +\infty[$. D'après 1-(d), f établit une bijection entre $[-1, +\infty[$ et $[-\frac{1}{\mathrm{e}}, +\infty[$. Enfin, la fonction exponentielle est aussi strictement croissante et continue ; elle établit une bijection entre $[-\frac{1}{\mathrm{e}}, +\infty[$ et $[\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}, +\infty[$. Par composition de bijections g est bijective de $I = [\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$ vers $[\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}, +\infty[$ et sa bijection réciproque est donnée par :

$$\forall y \in I,\ g^{-1}(y) = \ln^{-1} \circ f^{-1} \circ \exp^{-1}(y) = \exp(f^{-1}(\ln(y))).$$

(d) Déterminer $g^{-1}(4)$ en utilisant cette expression et de la question 1-(a).

Rappelant (1-(a)) que $f(\ln(2)) = 2\ln(2) = \ln(4)$. Donc (nous sommes dans le bon intervalle) $f^{-1}(\ln(4)) = \ln(2)$. Appliquons l'expression précédente :

$$g^{-1}(4) = \exp(f^{-1}(\ln(4)) = \exp(\ln(2)) = 2.$$

C'est bien le bon résultat puisque $g(2) = 2^2 = 4$.

Exercice 2 : Triangles semblables **(12 points)**

1. **Une équation complexe**

   On considère l'équation (E) d'inconnue $z \in \mathbf{C}$ liant son carré et son conjugué : $z^2 = \overline{z}$.

   (a) Résoudre cette équation sous forme algébrique en posant $z = x + \mathrm{i}y$.

   Indication : on doit trouver quatre solutions.

   En posant $z = x+\mathrm{i}y$, l'équation devient : $(x+\mathrm{i}y)^2 = x - \mathrm{i}y$. Développons, puis identifions parties réelle et imaginaire : $x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy = x - \mathrm{i}y$, donc $\begin{cases} x^2 - y^2 &= x \\ 2xy &= -y \end{cases}$.

   La deuxième égalité est équivalente à : $y = 0$ ou $x = -\frac{1}{2}$. Si $y = 0$, la première égalité devient $x^2 = x$. Donc $x(x-1)$ et nous déduisons que $x = 0$ ou $x = 1$. Si $x = -\frac{1}{2}$, la première égalité devient $\frac{1}{4} - y^2 = -\frac{1}{2}$. Donc $y^2 = \frac{3}{4}$ et nous déduisons $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   Conclusion : nous avons trouvé quatre solutions :

   $$z = 0 + 0\mathrm{i}, \qquad z = 1 + 0\mathrm{i}, \qquad z = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad z = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

   (b) Résoudre à nouveau cette équation sous forme polaire en posant $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

   Indication : il serait surprenant de ne pas trouver les mêmes solutions qu'à la question (a).

   Pour bien faire, nous pouvons déjà remarquer que $z = 0$ est solution (mais nous allons voir que cette solution apparaît naturellement dans le raisonnement qui suit). Si $z \neq 0$, nous pouvons l'écrire sous forme polaire $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. L'équation devient $r^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$. Ces deux nombres sont écrits sous forme polaire, nous pouvons identifier modules et arguments :

   $$r^2 = r \quad \text{et} \quad 2\theta = -\theta \mod 2\pi.$$

   La première égalité implique que $r = 0$ ou $r = 1$. La seconde devient $3\theta = 0 \mod 2\pi$, donc $\theta = 0 \mod \frac{2\pi}{3}$. Nous obtenons ainsi trois angles différents : $\theta = 0$, $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$. Les solutions sont donc :

   $$z = 0, \qquad z = 1, \qquad z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}, \qquad z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}.$$

2. **Une transformation géométrique**

   Considérons l'application φ définie sur $\mathbf{C}$ par :

   $$\varphi(z) = \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}z + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}.$$

   (a) Écrire φ comme une composée de transformations élémentaires : translation, rotation, homothétie...

   Décomposons l'action de φ :

   $$\varphi : z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}z \mapsto \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}z \mapsto \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}z + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}.$$

   Nous reconnaissons une rotation, une homothétie et une translation. Ainsi : $\varphi = T_{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}} \circ H_{\sqrt{3}} \circ R_{\frac{\pi}{6}}$.

   Remarque : $\varphi = T_{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}} \circ R_{\frac{\pi}{6}} \circ H_{\sqrt{3}}$ est également vrai.

(b) En déduire que φ est une bijection de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{C}$ et déterminer sa bijection réciproque.

Les trois transformations élémentaires précédentes sont des bijections, donc par composition φ est aussi une bijection. Et sa réciproque est donnée par :

$$\varphi^{-1} = R_{\frac{\pi}{6}}^{-1} \circ H_{\sqrt{3}}^{-1} \circ T_{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}^{-1} = R_{-\frac{\pi}{6}} \circ H_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \circ T_{-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}$$

(c) Vérifier que pour $\theta \in \mathbf{R}$, $\quad \varphi^{-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \sin(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$.
Indication : utiliser une formule d'Euler.

D'après la question précédente, φ^{-1} est défini pour tout $z \in \mathbf{C}$ par

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{3}}(z - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}).$$

Pour $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, cela devient :

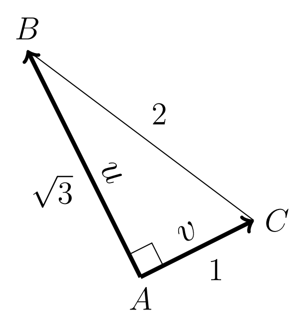
$$\varphi^{-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{3}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}).$$

Pour établir le résultat demandé, nous pouvons utiliser une factorisation par l'angle moyen, ou partir de l'expression attendue et utiliser la formule d'Euler du sinus.

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) &= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{3})}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3})} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{3})}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})}2\mathrm{i}\sin(\tfrac{\theta}{2}+\tfrac{\pi}{3}) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\sin(\tfrac{\theta}{2}+\tfrac{\pi}{3}) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\sin(\tfrac{\theta}{2}+\tfrac{\pi}{3})
\end{aligned}$$

3. **Un triangle**

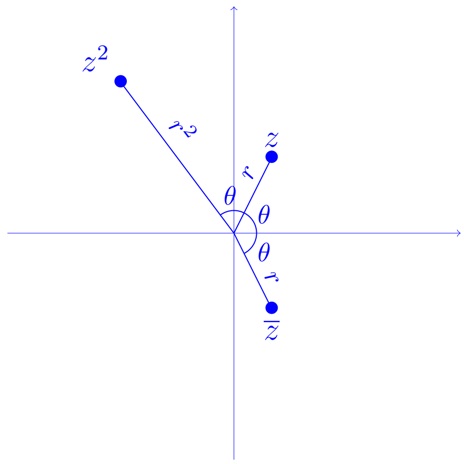
On considère le triangle rectangle ABC représenté ci-contre. Nous notons u et v les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.



(a) En raisonnant sur le module et l'argument, justifier que $\dfrac{u}{v} = \mathrm{i}\sqrt{3}$.

D'après la figure, les vecteurs u et v sont de modules respectifs $\sqrt{3}$ et 1, et l'angle formé par ces vecteurs est $\frac{\pi}{2}$. Alors : $|\frac{u}{v}| = \frac{|u|}{|v|} = \sqrt{3}$ et $\arg(\frac{u}{v}) = \arg(u) - \arg(v) = \frac{\pi}{2}$ mod 2π. Nous connaissons donc le module et l'argument de $\frac{u}{v}$, ainsi : $\frac{u}{v} = \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \sqrt{3}\mathrm{i}$.

(b) Soit $z = re^{\mathrm{i}\theta}$ un nombre complexe quelconque. Représenter dans le plan complexe le point $\tilde{A}$ d'affixe z ainsi que les points $\tilde{B}$ et $\tilde{C}$ d'affixes respectives $\overline{z}$ et z^2.



Le problème est le suivant : nous souhaitons trouver les nombres z pour lesquels le triangle $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ est semblable à notre triangle ABC (mêmes proportions et même orientation). D'après la question (a), cela revient à satisfaire l'égalité :

$$\frac{\overline{z} - z}{z^2 - z} = \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

(c) Montrer que cette équation est équivalente à dire que $z \notin \{0, 1\}$ et :

$$\left(\sqrt{3}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} z + e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = \sqrt{3}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\overline{z} + e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}.$$

C'est une question très calculatoire. Il faut un peu d'adresse pour faire apparaître les expressions demandées. Soit $z \in \mathbf{C}$ et raisonnons par équivalence.

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{z} - z}{z^2 - z} = \mathrm{i}\sqrt{3} \quad &\text{ssi} \quad \overline{z} - z = \mathrm{i}\sqrt{3}(z^2 - z) && \text{et } z^2 - z \neq 0 \\
&\text{ssi} \quad \overline{z} = \mathrm{i}\sqrt{3}z^2 + (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})z && \text{et } z \notin \{0, 1\} \\
&\text{ssi} \quad \overline{z} = \mathrm{i}\sqrt{3}z^2 + 2e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} z && \text{forme polaire de } 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} \\
&\text{ssi} \quad -\mathrm{i}\sqrt{3}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\overline{z} = 3e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} z^2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}z && \times(-\mathrm{i}\sqrt{3}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}) \\
&\text{ssi} \quad \sqrt{3}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\overline{z} = \left(\sqrt{3}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} z - \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}\right)^2 && \text{forme canonique} \\
&\text{ssi} \quad \sqrt{3}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\overline{z} = \left(\sqrt{3}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} z - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^2 - \left(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^2 && \text{simplification} \\
&\text{ssi} \quad \sqrt{3}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\overline{z} + e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = \left(\sqrt{3}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} z + e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right)^2 && -e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}
\end{aligned}$$

(d) En déduire que z est solution de ce problème si et seulement si $\varphi(z)$ est solution de l'équation (E) de la question 1.

En utilisant les propriétés du conjugué (addition et multiplication), nous pouvons réécrire la dernière égalité en :

$$\left(\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}z+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right)^2=\overline{\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}z+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}.$$

En posant $Z=\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}z+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$, nous reconnaissons l'équation : $Z^2=\overline{Z}$. Ainsi, en excluant $z=0$ et $z=1$ d'après la question précédente, z est solution de notre problème si et seulement si $Z=\varphi(z)$ est solution de l'équation (E).

(e) Conclure.

Les solutions de (E) sont (sous forme polaire) : $0, 1, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$. Les solutions du problème sont les antécédents par φ de ces solutions (0 et 1 exclus). En utilisant les résultats des questions 2-(b) et 2-(c) :

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(0)&=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}(-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}})=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\\
\varphi^{-1}(1)&=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{0}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{0}{2}}=1\qquad\text{(exclus)}\\
\varphi^{-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}})&=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\\
\varphi^{-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}})&=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}=0\qquad\text{(exclus)}
\end{aligned}$$

Les solutions du problème sont :

$$z=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\quad\text{et}\quad z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$