Contrôle 3

Calculatrice et documents sont interdits.
Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.
Durée de l'épreuve : 1h30.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : application réelle et complexe **(7 points)**

On considère l'application réelle :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 2x \end{array}$$

1. L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ?

On prolonge f sur $\mathbf{C}$ pour définir l'application complexe :

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \to & \mathbf{C} \\ z & \mapsto & z^2 - 2z \end{array}$$

2. Déterminer les antécédents par $\tilde{f}$ de -2.
3. Déterminer également les antécédents de $-1 + \mathrm{i}$.
4. Montrer que tout élément ω de $\mathbf{C}$ admet un ou deux antécédents par $\tilde{f}$. Qu'en déduit-on sur $\tilde{f}$?
5. Démontrer : $\forall z \in \mathbf{C},\ \ \tilde{f}(2 - z) = \tilde{f}(z)$.
6. Notons D l'ensemble : $D = \{x + \mathrm{i}y \in \mathbf{C} \mid y > 0 \ \text{ ou } \ [y = 0 \text{ et } x \geqslant 1]\}$.
   Montrer que $\tilde{f}$ établit une bijection entre D et $\mathbf{C}$.
   On remarquera que les points d'affixes z et $2 - z$ sont symétriques par rapport au point d'affixe 1.

Exercice 2 : Polygones réguliers

L'objectif de ce problème est de déterminer des critères calculatoires permettant de vérifier simplement si des points du plan forment un polygone régulier.

1. **Inégalité triangulaire** **(3 points)**

   (a) Soient θ_1 et θ_2 dans $\mathbf{R}$. Justifier que $\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)+\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) \leqslant 1$.

   (b) Montrer de plus que $\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)+\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) = 1$ si et seulement si $\theta_1 = \theta_2$ modulo 2π.

   (c) Soient z_1 et z_2 des nombres complexes non nuls. En utilisant leurs écritures polaires, démontrer l'inégalité triangulaire : $|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$.

   (d) Montrer de plus que $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$ si et seulement si z_1 et z_2 ont même argument.

   On admet pour la suite que le résultat se généralise à n nombres complexes z_1, $z_2, \ldots, z_n$ non nuls : $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$; et il y a égalité si et seulement si les n nombres ont le même argument.

2. **Points cocycliques** **(6 points)**

   Des points du plan sont dit cocycliques s'ils sont situés sur un même cercle.

   (a) Soit $n \geqslant 4$ et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des points du plan d'affixes respectives z_1, $z_2, \ldots, z_n$. Définir mathématiquement dans le langage des nombres complexes le fait que ces n points sont cocycliques.

   On admet le théorème suivant qui est un corollaire du théorème de l'angle inscrit :
   Théorème : soient A, B, C et D quatre points distincts du plan.
   Ils sont cocycliques ou alignés si et seulement si les angles orientés $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$ sont égaux modulo π.

   Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = 3+\mathrm{i}$, $z_B = -1+\mathrm{i}$, $z_C = -2\mathrm{i}$ et $z_D = 3-\mathrm{i}$.

   (b) Représenter ces points sur une figure.

   (c) Représenter également sur la figure l'argument de $z_A - z_C$ ainsi que celui de $z_B - z_C$.

   (d) Justifier ainsi que l'angle orienté $\widehat{ACB}$ est égal à $\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)$.

   (e) Montrer que le théorème ci-dessus se traduit ainsi en langage complexe : les quatre points A, B, C et D sont cocycliques ou alignés si et seulement si :

   $$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C} \Big/ \frac{z_B-z_D}{z_A-z_D} \quad \text{est un nombre réel.}$$

   Ce quotient de quotients est appelé birapport des quatre points.

   (f) Appliquer ce critère aux quatre points définis plus haut.

   (g) Deviner grâce à la figure le centre du cercle contenant les quatre points. Vérifier par le calcul qu'il est bien équidistant à ces quatre points.

   Remarque : si on souhaite montrer que $n > 4$ points sont cocycliques, il suffit d'appliquer le critère plusieurs fois, en montrant par exemple que chacun des points est cocyclique avec les trois premiers.

3. **Polygone régulier** **(8 points)**

Soient désormais n points du plan cocycliques (cela a pu être vérifié grâce à la partie précédente). Pour simplifier, nous supposerons qu'ils appartiennent tous au cercle de centre 0 et de rayon R.
Nous souhaitons désormais déterminer un critère permettant d'assurer que ces points forment un polygone régulier.

Notons $A_1, \ldots, A_n$ ces n points numérotés dans l'ordre sur le cercle, et $z_1, \ldots, z_n$ leurs affixes respectives. On note enfin $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$.
Nous allons démontrer le résultat suivant :

$$A_1, \ldots, A_n \text{ forment un polygone régulier} \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \omega^{n+1-k} z_k = n z_1.$$

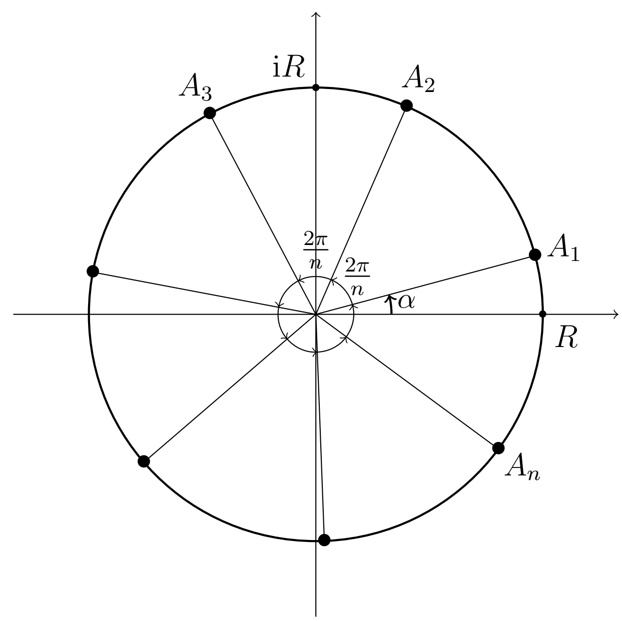
Commençons par un exemple.

(a) Que vaut ω pour $n = 4$?

(b) Montrer, en appliquant le résultat ci-dessus, que les points d'affixes $2+\mathrm{i}$, $-1+2\mathrm{i}$, $-2-\mathrm{i}$ et $1-2\mathrm{i}$ forment un carré.

Passons à la preuve et raisonnons par double implication.

Nous supposons d'abord que les points $A_1, \ldots, A_n$ forment un polygone régulier. Ils se répartissent sur le cercle comme sur la figure ci-contre, en notant α l'argument de z_1.



(c) Quelle est, d'après la figure, l'écriture polaire de z_k pour tout k ?

(d) Montrer ainsi que $\sum_{k=1}^{n} \omega^{n+1-k} z_k = n z_1$.

Supposons maintenant que $\sum_{k=1}^{n} \omega^{n+1-k} z_k = n z_1$.

(e) En déduire la valeur du module $\left|\sum_{k=1}^{n} \omega^{n+1-k} z_k\right|$.

(f) Appliquer l'inégalité triangulaire à $\left|\sum_{k=1}^{n} \omega^{n+1-k} z_k\right|$ et déduire de la partie 1 que pour tout k, $\arg(\omega^{n+1-k} z_k) = \arg(z_1)$.

(g) Conclure que les points $A_1, \ldots, A_n$ forment un polygone régulier.