Contrôle 3

Calculatrice et documents sont interdits.
Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.
Durée de l'épreuve : 1h20.
Le barème est donné à titre indicatif : 9 - 12.

Exercice 1 : étude d'une fonction réelle

1. On considère la fonction f définie par (5pts)

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & x^2 + x \end{array}$$

   (a) Dresser, sans justifications, le tableau de variation complet de f.

   (b) Donner, toujours sans justifications, les ensembles images $f(\mathbf{R})$ et $f([-1, 1])$, ainsi que l'image réciproque $f^{-1}(]-\infty, 0])$.

   (c) Déterminer tous les antécédents de 1 par f.

   (d) La fonction f est-elle injective ? Est-elle surjective ?

2. On considère maintenant la restriction de f suivante : (4 pts)

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}_+ & \to & \mathbf{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 + x \end{array}$$

   On peut démontrer, grâce au tableau de variation de f, que la fonction g est bijective. Nous allons le démontrer à nouveau de manière algébrique. Il n'est donc pas permis d'utiliser des arguments analytiques.

   (a) Démontrer l'injectivité de g, en utilisant la définition :
   « Soient x et x' dans $\mathbf{R}_+$ tels que ... ».
   Indication : on pourra factoriser par $(x - x')$.

   (b) Déterminer l'expression de la bijection réciproque de g.

Exercice 2 : étude d'une fonction complexe

On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbf{C}^* & \to & \mathbf{C}^* \\ z & \mapsto & \dfrac{6}{z} \end{array}$$

1. L'application φ est une bijection. Quelle est sa bijection réciproque ? (1 pt)

2. **Image d'un cercle par φ** (6 pts)
   Dans le plan complexe, nous noterons C le cercle de centre 1 et de rayon 1 privé de 0, et D la droite verticale d'équation complexe $\Re\mathrm{e}(z) = 3$.
   (a) Calculer $\varphi(1+\mathrm{i})$.
   (b) Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. Déterminer la forme algébrique de $\varphi(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$.
   (c) Soit $y \in \mathbf{R}$. Montrer : $|\varphi(3+\mathrm{i}y) - 1| = 1$.
   (d) Représenter sur une même figure les ensembles C et D, et les points d'affixes $1+\mathrm{i}$, $\varphi(1+\mathrm{i})$, $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\varphi(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$.
   (e) Définir mathématiquement l'ensemble C comme une partie de $\mathbf{C}^*$ de deux façons : sous forme implicite et sous forme paramétrique.
   (f) Montrer à l'aide des questions 1, 2-b et 2-c que $\varphi(C) = D$.

3. **Géométrie et équations** (3 pts)
   Comparons l'action de φ avec celle de transformations élémentaires.
   (a) Déterminer tous les points qui ont la même image par φ et par la rotation de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{2}$: cela revient à résoudre l'équation $\varphi(z) = R_{\frac{\pi}{2}}(z)$.
   (b) Déterminer de même tous les points ayant la même image par φ et par la translation de vecteur 5i.
   (c) Représenter l'une des solutions z obtenues dans les deux questions précédentes (celle de votre choix), ainsi que son image $\varphi(z)$.

4. **Composée de transformations géométriques** (2 pts)
   On considère à présent l'application ψ définies sur $\mathbf{C} \setminus \{-1\}$ par

   $$\psi(z) = \frac{6\mathrm{i}}{z+1}.$$

   (a) Écrire ψ comme une composée de φ avec des rotations et translations.
   (b) Soit $U = \{z \in \mathbf{C} \setminus \{-1\} \mid |z| = 1\}$ le cercle unité dans le plan complexe (privé de -1).
   Déduire de la question précédente et de la question 2-f l'image de U par ψ.