Contrôle 3

Calculatrice et documents sont interdits.
Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.
Durée de l'épreuve : 1h20.
Le barème est donné à titre indicatif : 12 - 8.

Exercice 1 : exponentielle complexe (12 pts)

On prolonge sur $\mathbf{C}$ l'application exponentielle de la manière suivante :

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \to & \mathbf{C} \\ z = x + \mathrm{i}y & \mapsto & \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} \end{array}$$

où $x + \mathrm{i}y$ est la forme algébrique du nombre complexe z.

Le but de cet exercice est d'en définir une application réciproque et d'en étudier des propriétés.

1. Vérifier que l'application exp est bien un prolongement de l'application exponentielle en regardant l'expression de $\exp(z)$ lorsque z est un nombre réel et lorsque z est un nombre imaginaire pur.

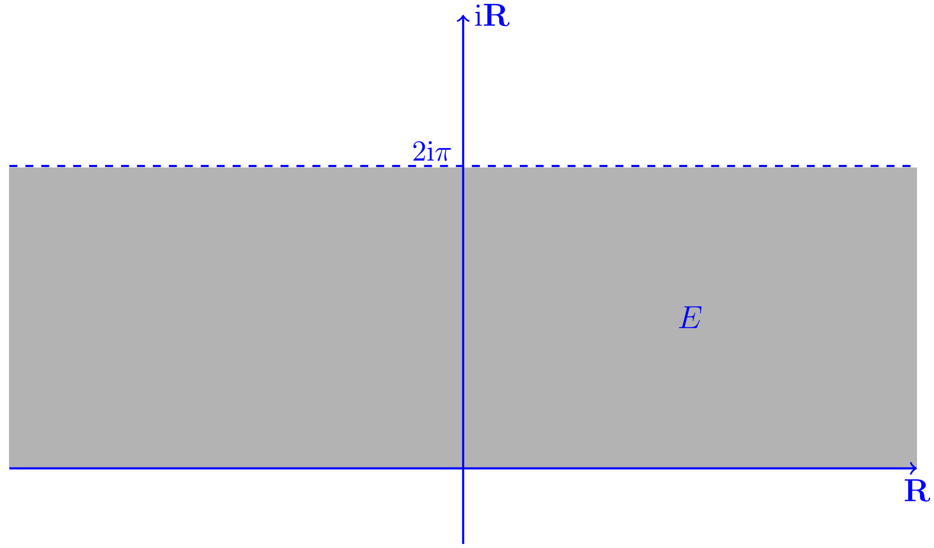
   Soit $z = x + 0\mathrm{i}$ un nombre réel. Alors $\exp(z) = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{0\mathrm{i}} = \mathrm{e}^x$. Ainsi $\exp(x) = \mathrm{e}^x$ et on retrouve bien l'exponentielle réelle que nous connaissons. Soit maintenant $z = 0 + \mathrm{i}y$ un nombre imaginaire pur. Alors $\exp(z) = \mathrm{e}^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$. Ainsi $\exp(\mathrm{i}y) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ et là encore, on retrouve l'exponentielle complexe définie en cours.

2. Justifier que cette application exp n'est ni injective, ni surjective.

   Montons que l'application exp n'est pas injective. Considérons en effet $z_1 = 0$ et $z_2 = 2\mathrm{i}\pi$. Alors $z_1 \neq z_2$ mais pourtant $\exp(z_2) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 1 = \mathrm{e}^0 = \exp(z_1)$. Ainsi, ces deux nombres complexes distincts ont la même image par exp.

   Montrons que l'application exp n'est pas surjective dans $\mathbf{C}$. En effet, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{e}^x \neq 0$ et $\forall y \in \mathbf{R}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} \neq 0$. On en déduit que $\forall z \in \mathbf{C}$, $\exp(z) \neq 0$. Donc 0 n'a pas d'antécédent par l'application exp.

3. On considère l'ensemble $E = \{z \in \mathbf{C} \mid \Im\mathrm{m}(z) \in [0, 2\pi[\}$. Représenter cet ensemble.



4. On considère désormais l'application exp restreinte de E vers $\mathbf{C}^*$: $\exp : E \to \mathbf{C}^*$.
   Montrer que cette nouvelle application est bijective.

   Montrons que exp est injective : soient z_1 et z_2 dans E tels que $\exp(z_1) = \exp(z_2)$. Montrons que $z_1 = z_2$.
   Écrivons-les sous forme algébrique : $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ et $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$.
   Alors par hypothèse, $\mathrm{e}^{x_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y_1} = \mathrm{e}^{x_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y_2}$.
   Les nombres e^{x_1} et e^{x_2} étant des réels positifs, on reconnaît deux formes polaires que l'on peut identifier.
   Donc $\mathrm{e}^{x_1} = \mathrm{e}^{x_2}$ et $y_1 = y_2 \mod 2\pi$.
   En passant au logarithme népérien, on déduit $x_1 = x_2$.
   D'autre part, comme z_1 et z_2 sont éléments de E, leurs parties imaginaires y_1 et y_2 sont dans $[0, 2\pi[$. Comme $y_1 = y_2 \mod 2\pi$, on déduit finalement $y_1 = y_2$.
   Finalement, on conclut que $z_1 = z_2$.

   Montrons que exp est surjective. Soit $z \in \mathbf{C}^*$. Montrons que z admet un antécédent dans E par exp. Écrivons-le sous forme polaire : $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.
   Posons alors $z' = \ln(r) + \mathrm{i}\theta$. Comme $\theta \in [0, 2\pi[$, z' est un élément de E.
   Et $\exp(z') = \mathrm{e}^{\ln(r)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = z$.
   Ainsi tout élément de $\mathbf{C}^*$ admet bien un antécédent dans E par exp.

   Finalement, l'application exp est injective et surjective, elle est donc bijective.

   On définit alors l'application $\log : \mathbf{C}^* \to E$ comme sa bijection réciproque.

5. Donner, en les justifiant, les valeurs de $\log(1)$, $\log(-1)$, $\log(\mathrm{i})$ et $\log(1+\mathrm{i})$.

   On ne peut utiliser rien d'autre que le fait que log est la bijection réciproque de exp. Pour en donner des valeurs, il faut utiliser des valeurs de exp.
   Comme $\exp(0) = 1$, on déduit que $\log(1) = 0$.
   Comme $\exp(\mathrm{i}\pi) = -1$, on déduit que $\log(-1) = \mathrm{i}\pi$.
   Comme $\exp(\mathrm{i}\frac{\pi}{2}) = \mathrm{i}$, on déduit que $\log(\mathrm{i}) = \mathrm{i}\frac{\pi}{2}$.
   On cherche le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ tel que $\exp(z) = 1 + \mathrm{i}$, *i.e.* $\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.
   On identifie ces formes polaires et on trouve $\mathrm{e}^{x} = \sqrt{2}$ et $y = \frac{\pi}{4}$. Ainsi $\exp(\ln(\sqrt{2}) + \mathrm{i}\frac{\pi}{4}) = 1 + \mathrm{i}$, donc $\log(1+\mathrm{i}) = \ln(\sqrt{2}) + \mathrm{i}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\ln(2) + \mathrm{i}\frac{\pi}{4}$.

6. A-t-on $\log(-1) + \log(-1) = \log((-1) \times (-1))$?

   D'après ce qui précède, $\log(-1) = \mathrm{i}\pi$. Donc $\log(-1) + \log(-1) = 2\mathrm{i}\pi$ et d'autre part $\log((-1) \times (-1)) = \log(1) = 0$. Donc $\log(-1) + \log(-1) \neq \log((-1) \times (-1))$.
   Autrement dit, la propriété classique du logarithme, $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$ *n'est pas valable avec ce logarithme complexe. C'est ce qu'on précise dans la question suivante.*

7. Soit z et z' des nombres complexes d'arguments compris entre 0 et π exclus. Démontrer, en utilisant les propriétés de l'exponentielle, que $\log(z) + \log(z') = \log(zz')$.

   Écrivons les formes polaires de z et z' : $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $z' = r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$ avec r et r' dans $\mathbf{R}_+^*$, θ et θ' dans $[0, \pi[$ d'après l'hypothèse.
   Alors $\log(z) = \ln(r) + \mathrm{i}\theta$ (qui est bien un élément de E car $\theta \in [0, \pi[$) et $\log(z') = \ln(r') + \mathrm{i}\theta'$ (idem).
   D'autre part, $\log(zz') = \log(rr'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}) = \ln(rr') + \mathrm{i}(\theta + \theta')$ (qui est bien un élément de E car $\theta + \theta' \in [0, 2\pi[$).
   Comme $\ln(rr') = \ln(r) + \ln(r')$, on obtient bien que $\log(z) + \log(z') = \log(zz')$.
   Sans l'hypothèse sur les arguments de z *et* z'*, on aurait dû raisonner modulo* 2π *pour bien obtenir des éléments de* E*, ce qui aurait pu rendre fausse la dernière égalité, comme e fut le cas dans la question précédente.*

8. Donner, sans justification, la limite suivante dans $\mathbf{C}$: $\lim_{\theta \to 2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

   L'exponentielle complexe est une application continue et on peut écrire $\lim_{\theta \to 2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 1$.

9. De même, donner sans justification, la valeur de $\log(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ pour $\theta \in [0, 2\pi[$ et en déduire la limite à gauche $\lim_{\theta \to 2\pi^-} \log(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$.

   Pour $\theta \in [0, 2\pi[$, $\log(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \mathrm{i}\theta$, donc $\lim_{\theta \to 2\pi^-} \log(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = 2\mathrm{i}\pi$.

10. Déduire des deux questions précédentes que l'application log n'est pas continue en 1.

    On a vu que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ converge vers 1 lorsque θ tend vers 2π. Et $\log(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ converge vers $2\mathrm{i}\pi$. Si l'application log était continue, $\log(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ convergerait vers $\log(1)$. Comme $\log(1) \neq 2\mathrm{i}\pi$, on déduit que l'application log n'est pas continue en 1.

Exercice 2 : résolution d'une équation de degré 4 (8 pts)

Le but de cet exercice est de déterminer et représenter les racines du polynôme

$$P = X^4 - 8X^3 + 24X^2 - 32X + 20.$$

On définit sur $\mathbf{C}$ l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \to & \mathbf{C} \\ z & \mapsto & (\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2})(z-2) \end{array}$$

1. Décomposer l'application f en une composée de transformations géométriques élémentaires.

   On écrit la forme polaire du terme en facteur : $\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. Alors pour $z \in \mathbf{C}$, $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(z-2)$ que l'on décompose à l'aide de transformations élémentaires :

   $$f : z \to z - 2 \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(z-2) \to \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(z-2)$$

   On reconnaît une translation, une rotation de centre O et une homothétie de même centre :

   $$f = H_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \circ R_{-\frac{\pi}{4}} \circ T_{-2}.$$

   Remarque : si on développe l'expression de $f(z)$, on obtient $f(z) = (\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2})z - 1 + \mathrm{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}z - 1 + \mathrm{i}$. On déduit alors une autre décomposition possible de f : $f = T_{-1+\mathrm{i}} \circ H_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \circ R_{-\frac{\pi}{4}}$.

2. En déduire la décomposition de sa bijection réciproque f^{-1} et donner l'expression algébrique de $f^{-1}(z)$ pour $z \in \mathbf{C}$.

   Les transformations géométriques élémentaires sont bijectives. Comme f est ainsi une composée de bijections, elle est également bijective et sa bijection réciproque est alors la composée des réciproques de ces transformations, mais dans l'ordre inverse :

   $$\begin{aligned} f^{-1} &= \left(H_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \circ R_{-\frac{\pi}{4}} \circ T_{-2}\right)^{-1} \\ &= T_{-2}^{-1} \circ R_{-\frac{\pi}{4}}^{-1} \circ H_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{-1} \\ &= T_2 \circ R_{\frac{\pi}{4}} \circ H_{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

   On en déduit son expression algébrique :

   $$\forall z \in \mathbf{C}, \quad f^{-1}(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}z + 2 = (1+\mathrm{i})z + 2.$$

3. Calculer $(\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2})^4$.

   Le plus simple est d'utiliser la forme polaire déjà vue plus haut :

   $$(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\mathrm{i}}{2})^4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^4 = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi} = -\frac{1}{4}.$$

4. Soit $z \in \mathbf{C}$. Calculer $f(z)^4$ et en déduire que z est racine de P si et seulement si $f(z)^4 = 1$.

   À l'aide du calcul précédent et de la formule du binôme de Newton, on obtient

$$\begin{aligned} f(z)^4 &= (\tfrac{1}{2} - \tfrac{\mathrm{i}}{2})^4 (z-2)^4 \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{4} \binom{4}{k} z^k (-2)^{4-k} \\ &= -\frac{1}{4}(z^4 - 8z^3 + 24z^2 - 32z + 16) \end{aligned}$$

   Raisonnons alors par équivalence : z est racine de P si et seulement si $P(z) = 0$
   ssi $z^4 - 8z^3 + 24z^2 - 32z + 20 = 0$
   ssi $z^4 - 8z^3 + 24z^2 - 32z + 16 = -4$
   ssi $-\frac{1}{4}(z^4 - 8z^3 + 24z^2 - 32z + 16) = 1$
   ssi $f(z)^4 = 1$.

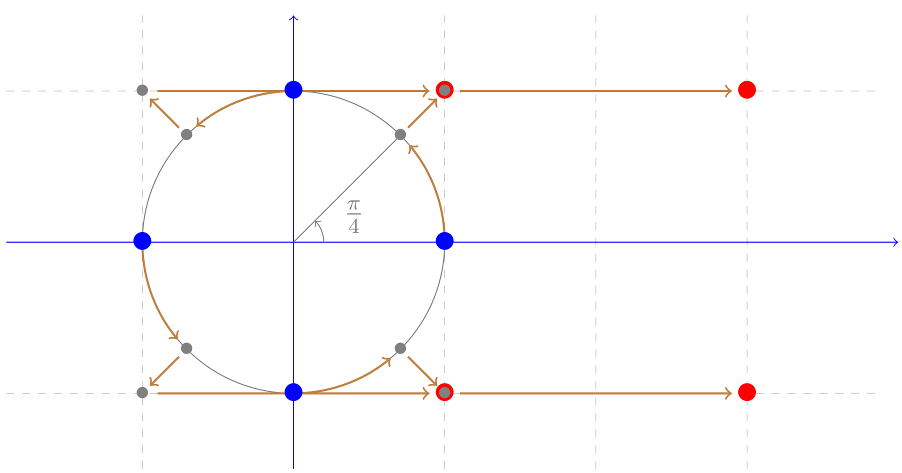
5. Résoudre l'équation $Z^4 = 1$ dans $\mathbf{C}$ et représenter ses solutions.

   Résoudre $Z^4 = 1$ revient à chercher les racines quatrièmes de $1 = 1 \cdot \mathrm{e}^{0\mathrm{i}}$. On les connaît :

$$\mathrm{e}^{0\mathrm{i}} = 1, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{4}} = \mathrm{i}, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{4}} = -1, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{4}} = -\mathrm{i}.$$

6. En déduire géométriquement la position des racines de P. Les représenter et donner leur forme algébrique.

   Récapitulons : $z \in \mathbf{C}$ est racine de P si et seulement si $f(z)^4 = 1$ si et seulement si $f(z) \in \{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$.
   On en déduit que les racines de P sont les antécédents par f des nombres 1, i, -1 et $-\mathrm{i}$.
   Comme f est bijective, il s'agit des nombres $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(\mathrm{i})$, $f^{-1}(-1)$ et $f^{-1}(-\mathrm{i})$.
   Conclusion : pour obtenir graphiquement les racines de P, on considère les points d'affixes 1, i, -1 et $-\mathrm{i}$, puis on les fait tourner d'un angle $\frac{\pi}{4}$ autour de O, on les éloigne de O d'un rapport $\sqrt{2}$ et on les translate de 2 vers la droite.



   On reconnaît ainsi les points d'affixes $3+\mathrm{i}$, $1+\mathrm{i}$, $1-\mathrm{i}$ et $3-\mathrm{i}$. Ce sont bien les racines de P.