Contrôle 3

Calculatrice et documents sont interdits.
Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.
Durée de l'épreuve : 1h20.
Le barème est donné à titre indicatif : 8 - 17.

Exercice : fonction arc tangente (8 pts)

On définit la fonction tangente par $\tan : \begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbf{R} \\ \theta & \mapsto & \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \end{array}$

Le but de cet exercice est de montrer de deux façons que cette application est une bijection. Cela permet de définir sa bijection réciproque appelée « arc tangente ».

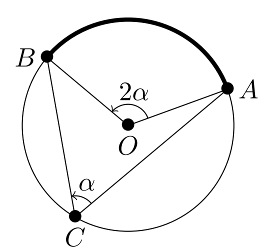
1. **Preuve analytique** : faire une étude de la fonction tan et montrer qu'elle est bijective.

   Preuve algébrique :
2. Soient α et β des nombres réels. Linéariser l'expression $\sin(\alpha)\cos(\beta)$.
3. Montrer, en utilisant la définition de l'injectivité, que l'application tan est injective.
4. Soient $t \in \mathbf{R}$ et $z = 1 + it \in \mathbf{C}$. On note $\theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ un argument de z.
   Exprimer $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ et $\tan(\theta)$ en fonction de t.
5. En déduire que tan est surjective puis conclure.

Problème : théorème de l'angle inscrit

Soient A, B et C trois points distincts d'un cercle de centre O. On considère un des deux arcs de cercle allant du point A au point B et on considère les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{ACB}$ associés à cet arc de cercle. Alors le théorème de l'angle inscrit affirme que

$$\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB}.$$



1. **Démonstration dans un cas particulier (4 pts)**
   Soient $\beta \in]0,\pi]$ et $\gamma \in]-\pi, 0[\cup]\beta, \pi]$. Soient O, A, B et C les points d'affixes respectives 0, 1, $e^{i\beta}$ et $e^{i\gamma}$.
   (a) Représenter ces points dans le plan complexe.
   (b) Déterminer la forme polaire du nombre complexe $z = \dfrac{e^{i\beta} - e^{i\gamma}}{1 - e^{i\gamma}}$.
   On pourra distinguer les cas $\gamma < 0$ et $\gamma > \beta$.
   (c) En déduire que $\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB}$.

2. **Une application** **(4 pts)**

   (a) Appliquer le résultat précédent aux points B et C d'affixes $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ et -1 et trouver ainsi un nombre complexe sous forme algébrique ayant pour argument $\frac{\pi}{12}$.

   (b) En déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.
   On ne demande pas de simplifier les expressions obtenues.

   (c) Retrouver ces résultats en déterminant sous forme polaire et sous forme algébrique les racines carrées de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.
   Les expressions obtenues ne seront peut-être pas les mêmes qu'à la question précédente.

3. **Réciproque du théorème** **(4 pts)**
   On souhaite démontrer, pour notre cas particulier, la réciproque du théorème de l'angle inscrit : on considère les mêmes points O, A et B d'affixes 0, 1 et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$ et un point C d'affixe z_C distinct des trois autres.
   Nous allons montrer que si $\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB}$, alors C est situé sur le cercle de centre O et de rayon 1.

   (a) À l'aide d'une figure et d'un argument géométrique simple, montrer que
   $$\forall r \in \mathbf{R}_+^*, \quad |r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta}{2}} - 1| = |r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}|.$$

   (b) Supposons que $\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB}$. Montrer que cela signifie qu'on peut écrire
   $$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} - z_C}{1 - z_C} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta}{2}}, \quad \text{avec } r \in \mathbf{R}_+^*.$$

   (c) En déduire l'expression de z_C en fonction de r et β.

   (d) En déduire que $|z_C| = 1$ et conclure.

4. **Généralisation de la preuve** **(5 pts)**
   On considère maintenant trois points distincts O, A et B tels que $OA = OB$. On note z_O, z_A et z_B leurs affixes.

   (a) Soient a et b des nombres complexes et f l'application définie sur $\mathbf{C}$ par $f(z) = az+b$. Déterminer a et b (en fonction de z_O et z_A) tels que $f(z_O) = 0$ et $f(z_A) = 1$.

   (b) Décrire f comme une composée de trois transformations géométriques élémentaires.
   On pourra considérer, sans l'expliciter, la forme polaire de a.

   (c) En déduire que $|f(z_B)| = 1$.

   (d) Expliquer succinctement comment la preuve du théorème de l'angle inscrit (et de sa réciproque) dans le cas général peut se déduire directement des preuves déjà effectuées dans les parties 1 et 3.

   On précisera bien la propriété des transformations géométriques élémentaires qui est ici nécessaire pour conclure.