Contrôle 3

Exercice : fonction arc tangente

On définit la fonction tangente par $\begin{array}{rccl} \tan : &]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbf{R} \\ & \theta & \mapsto & \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \end{array}$

Le but de cet exercice est de montrer de deux façons que cette application est une bijection. Cela permet de définir sa bijection réciproque appelée « arc tangente ».

1. **Preuve analytique** : faire une étude de la fonction tan et montrer qu'elle est bijective.

   La fonction tangente est le quotient de deux fonctions continues et dérivables sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, elle est donc continue et dérivable et sa dérivée est donnée par :

   $$\forall \theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[, \quad \tan'(\theta) = \frac{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \frac{1}{\cos^2(\theta)}.$$

   C'est une fonction strictement positive, donc tan est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. En particulier, elle est injective.

   D'autre part, elle diverge vers $-\infty$ en $-\frac{\pi}{2}$ et vers $+\infty$ en $\frac{\pi}{2}$. Comme elle est continue, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer qu'elle prend toutes les valeurs réelles : $\forall y \in \mathbf{R}, \exists \theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[, \quad \tan(\theta) = y$. Elle est donc surjective.

   Étant injective et surjective, la fonction tangente est bijective.

   Preuve algébrique :

2. Soient α et β des nombres réels. Linéariser l'expression $\sin(\alpha)\cos(\beta)$.

   Utilisons les formules d'Euler :

   $$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \left(\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i\beta}+e^{-i\beta}}{2}\right) = \frac{1}{4i}(e^{i(\alpha+\beta)} + e^{i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha+\beta)} - e^{i(-\alpha+\beta)})$$

   $$= \frac{1}{4i}(2i\sin(\alpha+\beta) + 2i\sin(\alpha-\beta)) = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta).$$

3. Montrer, en utilisant la définition de l'injectivité, que l'application tan est injective.
   Soient θ et θ' dans $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ tels que $\tan(\theta) = \tan(\theta')$.
   Alors $\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\sin(\theta')}{\cos(\theta')}$.
   Donc $\sin(\theta)\cos(\theta') = \sin(\theta')\cos(\theta)$. D'après la linéarisation précédente,
   $\frac{1}{2}\sin(\theta+\theta') + \frac{1}{2}\sin(\theta-\theta') = \frac{1}{2}\sin(\theta'+\theta) + \frac{1}{2}\sin(\theta'-\theta)$.
   Donc $\frac{1}{2}\sin(\theta-\theta') = \frac{1}{2}\sin(\theta'-\theta) = -\frac{1}{2}\sin(\theta-\theta')$ et on en déduit $\sin(\theta-\theta') = 0$.
   On connaît les racines de la fonction sinus et ainsi $\theta-\theta'$ est un multiple de π.

Or θ et θ' sont dans $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, donc $\theta-\theta'$ est dans $]-\pi,\pi[$.
Finalement, il ne reste que $\theta-\theta'=0$. Donc $\theta=\theta'$ et on conclut que tan est injective.

4. Soient $t\in\mathbf{R}$ et $z=1+it\in\mathbf{C}$. On note $\theta\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ un argument de z.
Exprimer $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ et $\tan(\theta)$ en fonction de t.

Le module de z est $|z|=\sqrt{1+t^2}$. Comme son argument est θ par définition, la forme polaire de z est $z=\sqrt{1+t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
Repassons à la forme algébrique :

$$z=\sqrt{1+t^2}\cos(\theta)+\mathrm{i}\sqrt{1+t^2}\sin(\theta)=1+\mathrm{i}t.$$

Par identification, on trouve $\cos(\theta)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ et $\sin(\theta)=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.
Et finalement, $\tan(\theta)=\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}=t$.

5. En déduire que tan est surjective puis conclure.

Soit $t\in\mathbf{R}$. Nous venons de montrer qu'il existe un angle $\theta\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan(\theta)=t$. Ainsi tout nombre réel t admet un antécédent par tan, donc l'application tangente est surjective.
Nous pouvons de nouveau conclure que tan est bijective.

Remarque : la preuve analytique permet de justifier que tan est bijective et de définir ainsi sa bijection réciproque arctan. Mais elle ne donne aucune information sur cette nouvelle fonction.

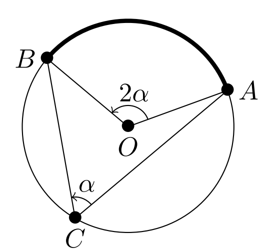
La preuve algébrique ne permet pas non plus d'expliciter la bijection réciproque arctan, mais elle fournit plus d'éléments pour comprendre comment obtenir les valeurs de cette fonction. En particulier, elle permet d'établir des formules trigonométriques, par exemple :

$$\cos(\arctan(t))=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\quad\text{et}\quad\sin(\arctan(t))=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Problème : théorème de l'angle inscrit

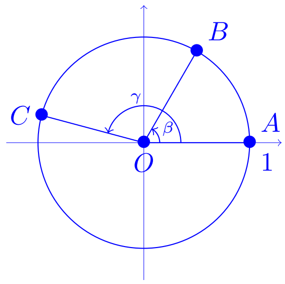
Soient A, B et C trois points distincts d'un cercle de centre O. On considère un des deux arcs de cercle liant le point A et B et on considère les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{ACB}$ associés à cet arc de cercle. Alors le théorème de l'angle inscrit affirme que

$$\widehat{AOB}=2\widehat{ACB}.$$



1. **Démonstration dans un cas particulier**
Soient $\beta\in]0,\pi]$ et $\gamma\in]-\pi,\pi]\setminus[0,\beta]$. Soient O, A, B et C les points d'affixes respectives 0, 1, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}$.

(a) Représenter ces points dans le plan complexe.



(b) Soit $z = \dfrac{e^{i\beta} - e^{i\gamma}}{1 - e^{i\gamma}}$.
Déterminer sa forme polaire. *On pourra distinguer les cas $\gamma < 0$ et $\gamma > \beta$.*

On utilise la factorisation par l'angle moyen :

$$z = \frac{e^{i\beta} - e^{i\gamma}}{1 - e^{i\gamma}} = \frac{e^{i\frac{\beta+\gamma}{2}}(e^{i\frac{\beta-\gamma}{2}} - e^{i\frac{-\beta+\gamma}{2}})}{e^{i\frac{\gamma}{2}}(e^{-i\frac{\gamma}{2}} - e^{i\frac{\gamma}{2}})} = e^{i\frac{\beta}{2}}\frac{\sin(\frac{\beta-\gamma}{2})}{\sin(\frac{-\gamma}{2})}.$$

Notons tout d'abord que par hypothèse $\gamma \in]-\pi, \pi]$ et $\gamma \neq 0$, donc $\sin(-\frac{\gamma}{2}) \neq 0$ et notre calcul est licite.

Remarquons ensuite que nous avons presque obtenu la forme polaire de z en l'écrivant comme le produit d'une exponentielle complexe et d'un nombre réel. Il reste à s'assurer que ce nombre réel est positif.

Nous savons que $\gamma \in]-\pi, 0[\cup]\beta, \pi]$. Distinguons deux cas.
Si $\gamma \in]-\pi, 0]$, alors $\beta > \gamma$ et $\frac{\beta-\gamma}{2} \in]0, \pi[$, donc $\sin(\frac{\beta-\gamma}{2}) > 0$. Et $\sin(-\frac{\gamma}{2}) > 0$. Donc $\frac{\sin(\frac{\beta-\gamma}{2})}{\sin(\frac{-\gamma}{2})} > 0$.
Si $\gamma \in]\beta, \pi]$, alors $\beta > \gamma$ et $\frac{\beta-\gamma}{2} \in]-\pi, 0[$, donc $\sin(\frac{\beta-\gamma}{2}) < 0$. Et $\sin(-\frac{\gamma}{2}) < 0$. Donc $\frac{\sin(\frac{\beta-\gamma}{2})}{\sin(\frac{-\gamma}{2})} > 0$.

Finalement, le quotient est toujours positif et nous avons trouvé la forme polaire de z :

$$z = \frac{\sin(\frac{\beta-\gamma}{2})}{\sin(\frac{-\gamma}{2})} e^{i\frac{\beta}{2}}.$$

(c) En déduire que $\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB}$.

L'angle $\widehat{AOB}$ est égal à β. L'angle $\widehat{ACB}$ est égal à l'argument de « $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ », c'est-à-dire z. D'après la question précédente, l'argument de z est égal à $\frac{\beta}{2}$. On obtient bien que $\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB}$.

2. **Une application**

(a) Appliquer le résultat précédent aux points B et C d'affixes $e^{i\frac{\pi}{6}}$ et -1 et trouver ainsi un nombre complexe sous forme algébrique ayant pour argument $\frac{\pi}{12}$.
L'angle $\widehat{AOB}$ est ici égal à $\frac{\pi}{6}$. D'après le théorème de l'angle inscrit, l'angle $\widehat{ACB}$ est égal à $\frac{\pi}{12}$, ce qui revient ici à dire que le vecteur $\vec{CB}$ a un argument $\frac{\pi}{12}$. Ce vecteur a

pour affixe $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} - (-1) = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\mathrm{i}}{2}$.

(b) En déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Le module de ce nombre est $|z| = \sqrt{2+\sqrt{3}}$. D'après ce qui précède, $\frac{z}{|z|} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$. Identifions les parties réelles et imaginaires de ces deux nombres :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

Il est possible de simplifier ces expressions. Il faut tout d'abord remarquer que $(1+\sqrt{3})^2 = 4+2\sqrt{3} = 2(2+\sqrt{3})$. On en déduit que $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Ainsi

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}+2}{2}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} = \frac{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}(3-1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

De même, on obtient

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

(c) Retrouver ces résultats en déterminant sous forme polaire et sous forme algébrique les racines carrées de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

Les racines carrées de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ sont $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ et $-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$.
D'autre part $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}$. Cherchons $x+\mathrm{i}y$ tel que $(x+\mathrm{i}y)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}$. On obtient le système $x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $2xy = \frac{1}{2}$. On ajoute l'égalité des modules : $x^2 + y^2 = 1$. Après résolution, on trouve $x = \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$ et $y = \pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$. De plus $xy > 0$ donc x et y sont de même signe et nous pouvons conclure.
En particulier, comme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ a des parties réelle et imaginaire positive, elle est égale à la racine $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. Par identification, on en déduit

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

En utilisant de nouveau $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, on peut simplifier la première expression et retrouver :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

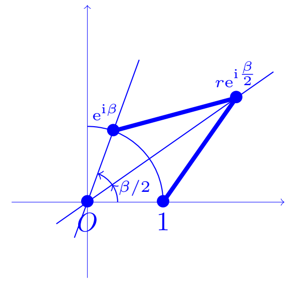
Et en vérifiant que $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$, on obtient de nouveau

$$\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

3. **Réciproque du théorème**
On souhaite démontrer, pour notre cas particulier, la réciproque du théorème de l'angle inscrit : on considère les mêmes point O, A et B d'affixes 0, 1 et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$ et un point C d'affixe z_C distinct des trois autres.
Nous allons montrer que si $\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB}$, alors C est situé sur le cercle de centre O et de rayon 1.

(a) À l'aide d'une figure et d'un argument géométrique simple, montrer que

$$\forall r \in \mathbf{R}_+^*, \quad |r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta}{2}} - 1| = |r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}|.$$



Tous les points d'affixe $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta}{2}}$ sont sur la droite D passant par l'origine et d'angle $\frac{\beta}{2}$. Or D est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$. En particulier, comme $OA = OB = 1$, le triangle OAB est isocèle et D est aussi la médiatrice de $[AB]$. En particulier, tous les points de D sont équidistants à A et B. En complexe cela se traduit par

$$\forall r \in \mathbf{R}_+^*, \quad |r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta}{2}} - 1| = |r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}|.$$

(b) Supposons que $\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB}$. Montrer que cela signifie qu'on peut écrire

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} - z_C}{1 - z_C} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta}{2}}, \quad \text{avec } r \in \mathbf{R}_+^*.$$

L'angle $\widehat{AOB}$ vaut β, donc notre hypothèse signifie que l'angle $\widehat{ACB}$ vaut $\frac{\beta}{2}$. Cet angle est l'argument de « $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ » donc de $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} - z_C}{1 - z_C}$. Donc si on note r son module, on déduit que $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} - z_C}{1 - z_C} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta}{2}}$.

(c) En déduire l'expression de z_C en fonction de r et β.

On déduit de l'égalité précédente que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} - z_C = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta/2} - z_C r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta}{2}}$, donc $(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta}{2}} - 1)z_C = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$, donc $z_C = \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta}{2}} - 1}$.

(Notons que par hypothèse, $B \neq A$, donc $\beta \neq 0$ et donc $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta}{2}} - 1 \neq 0$.)

(d) En déduire que $|z_C| = 1$ et conclure.

D'après la question 1. $|r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta}{2}} - 1| = |r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}|$, donc $|z_C| = \left|\frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta}{2}} - 1}\right| = \frac{|r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}|}{|r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta}{2}} - 1|} = 1$.
On en déduit que C appartient au cercle de centre O de rayon 1. Nous avons ainsi démontré la réciproque du théorème de l'angle inscrit.

4. **Généralisation de la preuve**
On considère maintenant trois points distincts O, A et B tels que $OA = OB$. On note z_O, z_A et z_B leurs affixes.

(a) Soient a et b des nombres complexes et f l'application définie sur $\mathbf{C}$ par $f(z) = az+b$. Déterminer a et b (en fonction de z_O et z_A) tels que $f(z_O) = 0$ et $f(z_A) = 1$.

On chercher a et b tels que

$$\begin{cases} az_O + b &= 0 \\ az_A + b &= 1 \end{cases}$$

Soustrayons ces deux égalités : $a(z_O - z_A) = -1$, donc $a = \frac{1}{z_A - z_O}$. Alors $b = -az_O = -\frac{z_0}{z_O - z_A}$. Rappelons que $A \neq O$ par hypothèse, donc $z_O - z_A \neq 0$.

(b) Décrire f comme une composée de trois transformations géométriques élémentaires. *On pourra considérer, sans l'expliciter, la forme polaire de a.*

Écrivons $a = \frac{1}{z_A - z_O}$ sous forme polaire : $a = \rho e^{i\theta}$. Alors, on peut décomposer l'application $f : z \mapsto \rho e^{i\theta} z + b$ ainsi :

$$f = T_b \circ H_\rho \circ R_\theta.$$

(c) En déduire que $|f(z_B)| = 1$.

Par hypothèse, $OA = OB$. Nous savons que les isométries R_θ et T_b préservent les distances et que l'homothétie H_ρ les multiplie par un facteur ρ. Appliquons cela aux points O, A et B :

$$|f(z_B) - f(z_O)| = |T_b(H_\rho(R_\theta(z_B))) - T_b(H_\rho(R_\theta(z_O)))| = |H_\rho(R_\theta(z_B)) - H_\rho(R_\theta(z_O))|$$

$$= \rho|R_\theta(z_B) - R_\theta(z_O)| = \rho|z_B - z_O|.$$

De même, $|f(z_A) - f(z_O)| = \rho|z_A - z_0|$. Or $OA = OB$, donc $|z_B - z_0| = |z_A - z_0|$. On en déduit $|f(z_B) - f(z_0)| = |f(z_A) - f(z_0)|$. Enfin, $f(z_0) = 0$ et $f(z_A) = 1$, donc finalement $|f(z_B)| = |1| = 1$.

(d) Expliquer succinctement pourquoi la preuve du théorème de l'angle inscrit (et de sa réciproque) dans le cas général peut se déduire des preuves effectuées dans les parties 1 et 3. On précisera bien quelle propriété des transformations géométriques élémentaires est nécessaire pour conclure.

Soit C un point distinct de A et B situé sur le cercle de centre O passant par A et B. On souhaite démontrer que si ces angles correspondent au même arc de cercle, on a $\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB}$.

Regardons l'image de tous ces points par l'application f. Comme il s'agit d'une similitude, elle préserve les angles et les formes (seules les distances sont modifiées d'un facteur ρ. En particulier, les images de B et C sont toutes les deux situées sur le cercle unité et nous retrouvons donc la situation étudiée dans la partie 1. Ainsi nous avons démontré que $f(A)\widehat{f(0)}f(B) = 2f(A)\widehat{f(C)}f(B)$. Or $f(A)\widehat{f(0)}f(B) = \widehat{AOB}$ et $f(A)\widehat{f(C)}f(B) = \widehat{ACB}$. Ainsi on peut conclure que $\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB}$.

Il en est de même pour la réciproque du théorème : la similitude permet de se ramener au cas étudié dans la partie 3, et par préservation des angles, le même résultat se déduit pour notre cas général.