Corrigé du contrôle 3

Exercice : racines cubiques

Soit $\omega = 2 + 11\mathrm{i} \in \mathbf{C}$. Notre objectif est de déterminer les racines cubiques de ω dans $\mathbf{C}$.

1. Donner la forme polaire de ω. Commenter.

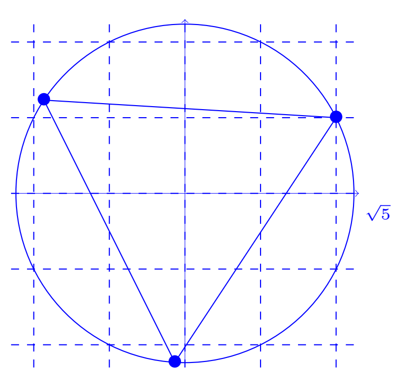
   Le module de ω est $|\omega| = \sqrt{2^2 + 11^2} = \sqrt{125}$. Donc $\omega = \sqrt{125}\left(\frac{2}{\sqrt{125}} + \frac{11}{\sqrt{125}}\mathrm{i}\right)$. On ne reconnaît pas le cosinus et le sinus d'un angle remarquable. On ne peut pas donner l'argument de ω de manière explicite. On utilise alors la fonction arc tangente (en notant bien que $\Re(\omega) > 0$) :
   $$\omega = \sqrt{125}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ \arctan(\frac{11}{2})}.$$
   Ce n'est pas satisfaisant pour extraire les racines cubiques de ω.

2. Calculer $(2 + \mathrm{i})^3$.

   On calcule en utilisant la formule du binôme :
   $$(2 + \mathrm{i})^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2\mathrm{i} + 3 \cdot 2\mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 = 8 + 12\mathrm{i} - 6 - \mathrm{i} = 2 + 11\mathrm{i} = \omega.$$

3. En déduire une expression des trois racines cubiques de ω et les représenter dans le plan complexe.

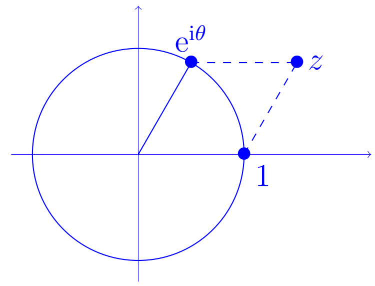
   On sait d'après un résultat du cours que ω admet trois racines cubiques dans $\mathbf{C}$. Et si τ est une racine cubique de ω, alors les deux autres racines cubiques sont $\tau\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ et $\tau\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$. Or nous avons trouvé une racine cubique de ω : $2 + \mathrm{i}$. Les deux autres racines cubiques sont donc :
   $$(2 + \mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = (2 + \mathrm{i})(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}) = (-1 - \tfrac{\sqrt{3}}{2}) + \mathrm{i}(\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}),$$
   $$(2 + \mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} = (2 + \mathrm{i})(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}) = (-1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}) + \mathrm{i}(-\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}).$$
   Les trois racines cubique sont situées sur le cercle de centre O, de rayon $\sqrt[3]{\sqrt{125}} = \sqrt{5}$ et forment un triangle équilatéral.



Problème : mécanisme de Peaucellier

1. **Préliminaires : géométrie complexe et trigonométrie**

   (a) Soit $\theta \in [0, \pi]$. Représenter dans le plan le point d'affixe $z = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.



   (b) Déterminer l'écriture polaire de z. *On pourra commencer par trouver son argument.*

   Géométriquement, en raisonnant sur le losange de sommets 0, 1, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et z, on voit que l'argument de z doit être $\frac{\theta}{2}$. Montrons-le en faisant apparaître cet argument et une formule d'Euler :

$$z = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}) = 2\cos(\theta/2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}.$$

   Comme $\theta \in [0, \pi]$, $\theta/2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, donc $\cos(\theta/2) \geqslant 0$. Ainsi, nous avons bien obtenu l'écriture polaire de z.

   (c) Calculer $z' = 5/\overline{z}$ et préciser sa partie réelle.

   Calculons en utilisant le résultat précédent :

$$z' = \frac{5}{\overline{z}} = \frac{5}{2\cos(\theta/2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}} = \frac{5}{2\cos(\theta/2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}.$$

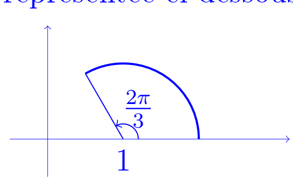
   Sa partie réelle est $\Re(z') = \frac{5}{2\cos(\theta/2)}\cos(\theta/2) = \frac{5}{2}$.
   On remarque que ce résultat ne dépend pas de θ.

   (d) En utilisant les variations de la fonction cos, déterminer l'ensemble $E = \{\theta \in [0, \pi] \mid \cos(\frac{\theta}{2}) \geqslant \frac{1}{2}\}$.

   Avec une étude de fonction, on montre que la fonction $f : \theta \mapsto \cos(\theta/2)$ est strictement décroissante et continue sur $[0, \pi]$. Elle réalise ainsi une bijection de $[0, \pi]$ vers $[0, 1]$. On en déduit que $E = f^{-1}([\frac{1}{2}, 1]) = [f^{-1}(1), f^{-1}(\frac{1}{2})] = [0, \frac{2\pi}{3}]$ (car $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi/3) = \frac{1}{2}$).

   (e) Décrire géométriquement l'ensemble $F = \{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\ ;\ \theta \in E\}$.

   On reconnaît une portion du cercle de centre 1 et de rayon 1. Pour $\theta \in E = [0, \frac{2\pi}{3}]$, il s'agit de la portion de cercle représentée ci-dessous.



(f) Déterminer l'ensemble $G = \{\tan(\frac{\theta}{2})\ ;\ \theta \in E\}$ (où tan désigne la fonction tangente).

La fonction $g : \theta \mapsto \tan(\theta/2)$ est une fonction strictement croissante et continue sur $]-\pi, \pi[$. Ainsi

$$G = g(E) = g([0, 2\pi/3]) = [g(0), g(2\pi/3)] = [\tan(0), \tan(\pi/3)] = [0, \sqrt{3}].$$

2. **Le mécanisme de Peaucellier**

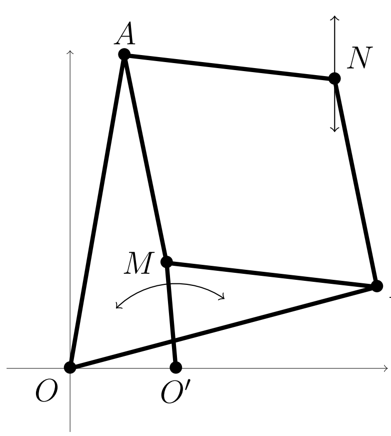
Le mécanisme de Peaucellier est un système mécanique constitué de tiges rigides liées entre elles et dont le but est de transformer un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne.

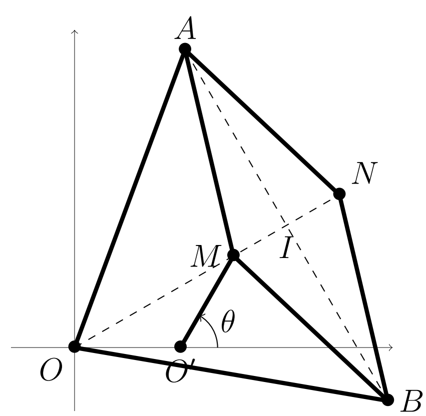
Décrivons et modélisons son fonctionnement à l'aide des deux figures représentant le système dans deux positions différentes :

— Les points O et O' sont fixes d'affixes 0 et 1.
— Le point M est en rotation autour du point O'. Le reste du système se déplace avec M. Notre objectif est de décrire la position du point N en fonction de celle de M.
— Les longueurs des tiges sont données par

$$OO' = O'M = 1 \qquad OA = OB = 3 \qquad MA = AN = NB = BM = 2.$$

— Le seul paramètre libre du système est l'angle θ formé par $(O'M)$ et l'axe des abscisses.
— On note I le centre du losange $MANB$.





Pour chaque point X du problème, on notera z_X son affixe dans le plan complexe.
Remarque : certains calculs ont été faits dans les préliminaires, il est inutile de les refaire !

(a) Donner l'affixe de M et justifier que $OM = 2\cos(\frac{\theta}{2})$.

M a pour affixe $z_M = 1 + e^{i\theta}$. Comme on l'a déjà vu, son module vaut $|z_M| = OM = 2\cos(\theta/2)$.

(b) Montrer, à l'aide d'arguments géométriques, que les points O, M et N sont alignés.

Le milieu I du losange $MANB$ est le milieu du segment $[AB]$. Comme $OA = OB$, on déduit que (OI) est la médiatrice de $[AB]$. De même, comme $MA = MB$ et

$NA = NB$, la droite (MN) est aussi la médiatrice de $[AB]$. Donc ces deux droites (OI) et (MN) sont égales et les points O, M, I et N sont alignés.

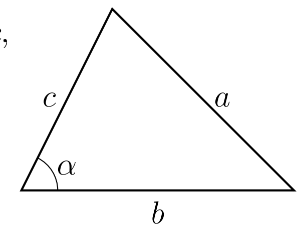
(c) En déduire l'argument de z_N.

Comme les points M et N sont situés sur une même droite partant de O, ils ont le même argument. Donc $\arg(z_N) = \arg(z_M) = \theta/2$.

(d) On admet l'égalité d'Al-Kashi :

Dans un triangle dont les côtés ont pour longueurs a, b et c, avec un angle α opposé au côté de longueur a, on a

$$\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$



Notons α l'angle $\widehat{MOA}$. Montrer que $\cos(\alpha) = \dfrac{5 + 4\cos^2(\frac{\theta}{2})}{12\cos(\frac{\theta}{2})}$.

On applique cette égalité dans le triangle MOA :

$$\cos(\alpha) = \frac{3^2 + (2\cos(\theta/2))^2 - 2^2}{2 \cdot 3 \cdot 2\cos(\theta/2)} = \frac{5 + 4\cos^2(\frac{\theta}{2})}{12\cos(\frac{\theta}{2})}.$$

(e) En déduire le module $|z_I|$ en utilisant une projection orthogonale du point A sur la droite (OM).

Le projeté orthogonal du point A sur la droite (OM) est le point I. Ainsi $OI = OA\cos(\alpha)$, donc $|z_I| = 3\cos(\alpha) = \frac{5+4\cos^2(\frac{\theta}{2})}{4\cos(\frac{\theta}{2})}$.

(f) En déduire le module $|z_I - z_M|$, puis $|z_N|$.

On obtient $|z_I - z_M| = OI - OM = \frac{5+4\cos^2(\frac{\theta}{2})}{4\cos(\frac{\theta}{2})} - 2\cos(\theta/2) = \frac{5}{4\cos(\frac{\theta}{2})} - \cos(\theta/2)$.
Ensuite, en utilisant le fait que I est le milieu de MN :

$$|z_N| = ON = OM + 2MI = |z_M| + 2|z_I - z_M| = \frac{5}{2\cos(\frac{\theta}{2})}.$$

(g) Conclure que $z_N = \frac{5}{2\cos(\frac{\theta}{2})}e^{i\theta/2}$ et que N est situé sur une certaine droite verticale que l'on précisera.

Nous avons déterminé le module et l'argument de N, donc $z_N = \frac{5}{2\cos(\frac{\theta}{2})}e^{i\theta/2}$. D'après les préliminaires, sa partie réelle vaut $\frac{5}{2}$ et ne dépend pas de θ ! Ainsi, le point N est toujours situé sur la droite d'équation $x = \frac{5}{2}$.

Terminons en précisant le lieu exact des points N obtenus lorsqu'on met en mouvement le mécanisme.

Il n'est pas possible de faire tourner le point M autant qu'on le souhaite. On est contraint par le triangle OAM : il est nécessaire d'avoir toujours $OA \leqslant OM + MA$.

(h) À l'aide des préliminaires, déterminer l'ensemble des angles $\theta \in [0, \pi]$ pour lesquels $OA \leqslant OM + MA$.

La condition se traduit par $3 \leqslant 2\cos(\theta/2) + 2$, donc $\cos(\theta/2) \geqslant \frac{1}{2}$. On a déjà montré que cela équivaut à dire que $\theta \in [0, 2\pi/3]$.

(i) Déterminer les parties imaginaires des points N correspondant à ces valeurs de θ et en déduire le lieu des points N lorsqu'on fait tourner le mécanisme.

La partie imaginaire de z_N est $\frac{5}{2\cos(\frac{\theta}{2})}\sin(\theta/2) = \frac{5}{2}\tan(\theta/2)$. On sait que pour θ variant dans $[0, 2\pi/3]$, $\tan(\theta/2)$ parcourt l'intervalle $[0, \sqrt{3}]$, donc la partie imaginaire de z_N parcourt l'intervalle $[0, \frac{5\sqrt{3}}{2}]$.

Conclusion : en utilisant la symétrie du problème par rapport à l'axe des abscisses, on peut affirmer que le point M peut tourner avec un angle variant de $-2\pi/3$ à $2\pi/3$. Et le point N correspondant se déplacera verticalement sur la droite d'équation $x = \frac{5}{2}$ avec une hauteur variant entre $-5\sqrt{3}/2$ et $5\sqrt{3}/2$.