

CORRIGÉ DU CONTRÔLE 3

Exercice 1 Cardioïde

On considère dans $\mathbf{C}$ l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{2e^{it} + e^{2it} ; t \in \mathbf{R}\}.$$

Nous souhaitons représenter cette courbe appelée cardioïde.

1. Déterminer les éléments de $\mathcal{C}$ qu'on obtient pour $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ et 2π .

Notons $f(t) = 2e^{it} + e^{2it}$. Alors $f(0) = 3$, $f(\frac{\pi}{2}) = -1 + 2i$, $f(\pi) = -1$, $f(\frac{3\pi}{2}) = -1 - 2i$, $f(2\pi) = 3$. La fonction f étant 2π -périodique, la courbe se referme.

2. Démontrer $\forall z \in \mathcal{C}, |z| \leq 3$.

Soit $z \in \mathcal{C}$. Cela signifie qu'il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que $z = 2e^{it} + e^{2it}$. Alors $|z| = |2e^{it} + e^{2it}| \leq |2e^{it}| + |e^{2it}|$ d'après l'inégalité triangulaire. Donc $|z| \leq 2 + 1 = 3$. Ainsi $\forall z \in \mathcal{C}, |z| \leq 3$.

On cherche à déterminer les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses et d'ordonnées maximales.

3. Démontrer que pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\cos(t) + \cos(2t) = 2 \cos\left(\frac{3t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin(t) + \sin(2t) = 2 \sin\left(\frac{3t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right).$$

Il y a beaucoup de preuves possibles. On peut obtenir ces formules en utilisant des formules trigonométriques classiques. Si on veut utiliser les nombres complexes, voici deux méthodes possibles :

$$\begin{aligned} 2 \cos\left(\frac{3t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) &= 2 \left(\frac{e^{3it/2} + e^{-3it/2}}{2} \right) \left(\frac{e^{it/2} + e^{-it/2}}{2} \right) = \frac{1}{2} (e^{2it} + e^{it} + e^{-it} + e^{-2it}) \\ &= \frac{1}{2} (2 \cos(2t) + 2 \cos(t)). \end{aligned}$$

Puis on fait de même pour l'autre formule.

Plus astucieux :

$$e^{2it} + e^{it} = e^{3it/2} (e^{it/2} + e^{-it/2}) = e^{3it/2} 2 \cos(t/2).$$

Si on prend la partie réelle des deux membres on obtient $\cos(2t) + \cos(t) = 2 \cos(3t/2) \cos(t/2)$ et si on prend les parties imaginaires on obtient la seconde formule.

4. Considérer les parties réelles et imaginaires des points de $\mathcal{C}$ et déterminer pour quelles valeurs du paramètre t elles peuvent être maximales ou minimales.

Indication : penser à dériver.

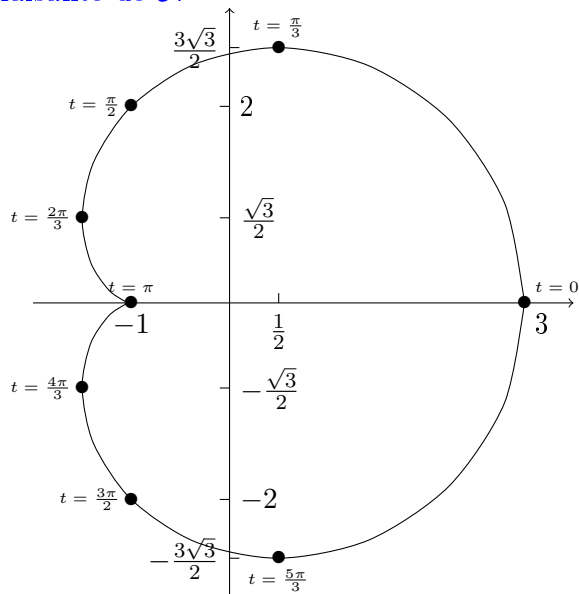
Soit $t \in \mathbf{R}$. La partie réelle de $f(t)$ est $f_R(t) = 2\cos(t) + \cos(2t)$. Si la fonction f_R a un extremum en t , alors $f'_R(t) = 0$. On dérive donc : $f'_R(t) = -2\sin(t) - 2\sin(2t) = -4\sin(\frac{3t}{2})\cos(\frac{t}{2})$. Alors $f'_R(t) = 0$ ssi $3t/2 = 0 \bmod \pi$ ou $t/2 = \pi/2 \bmod \pi$. Donc $f'_R(t) = 0$ pour $t = 0, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3 \bmod 2\pi$.

De même la partie imaginaire est $f_I(t) = 2\sin(t) + \sin(2t)$ et sa dérivée est $f'_I(t) = 4\cos(\frac{3t}{2})\cos(\frac{t}{2})$. Elle est nulle pour $t = \pi/3, \pi, 5\pi/3 \bmod 2\pi$.

Nous avons ainsi obtenu les valeurs de t pour lesquelles l'abscisse ou l'ordonnée peuvent être maximales ou minimales.

5. Représenter l'allure de $\mathcal{C}$.

Notre étude ne nous permet de garantir une représentation parfaite de $\mathcal{C}$. Mais nous pouvons ajouter les points obtenus pour les valeurs de t obtenues dans la question précédente. Et nous savons que ces points devraient sans doute correspondre aux abscisses et ordonnées maximales de la courbe. Nous pouvons ainsi proposer une ébauche satisfaisante de $\mathcal{C}$.



On s'intéresse maintenant à une propriété mécanique de $\mathcal{C}$. On considère le cercle trigonométrique C_0 et on imagine un autre cercle C_1 de rayon 1 roulant autour de C_0 . On s'intéresse à la trajectoire d'un des points de C_1 .

6. En se basant sur la figure ci-contre, donner l'abscisse du vecteur $\overrightarrow{O\Omega}$ en fonction de l'angle α .

Le vecteur $\overrightarrow{O\Omega}$ est de longueur 2 et fait un angle α avec l'horizontale ; son affixe est donc $2e^{i\alpha}$.

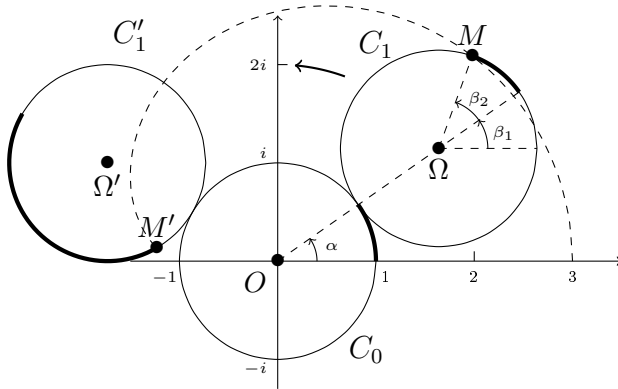
7. Donner également l'abscisse du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ en fonction de β .

Le vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ est de longueur 1 et fait un angle β avec l'horizontale ; son affixe est donc $e^{i\beta}$.

8. En déduire que M se déplace sur notre cardioïde au cours du mouvement.

On remarque graphiquement que $\beta = 2\alpha$. Sur la figure ci-dessous nous avons découpé β en $\beta_1 + \beta_2$. On a $\beta_1 = \alpha$ car ce sont des angles alternes-externes et on a $\beta_2 = \alpha$ car ce sont les secteurs angulaires de deux arcs de même longueur sur des cercles de rayon 1. Ainsi $\beta = 2\alpha$.

Enfin le vecteur $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ a pour affixe (d'après la relation de Chasles) $2e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2e^{i\alpha} + e^{2i\alpha}$. On reconnaît bien un point de la cardioïde !



La propriété vérifiée signifie que la cardioïde est une épicycloïde du cercle. Pour visualiser la rotation du cercle le long de l'autre, on pourra regarder l'excellent site mathcurve : [http ://www.mathcurve.com/courbes2d/cardioid/cardioid.shtml](http://www.mathcurve.com/courbes2d/cardioid/cardioid.shtml).

Exercice 2 La loi max

Sur $\mathbf{N}$, on définit la loi $*$ par

$$\forall a \in \mathbf{N}, \forall b \in \mathbf{N}, \quad a * b = \max(a, b).$$

1. La loi $*$ est-elle associative et commutative ?

La loi est associative : cela traduit simplement le fait que la notion de « maximum de trois nombres » ne nécessite pas de parenthésage.

$$\forall (a, b, c) \in \mathbf{N}^3, \quad \max(\max(a, b), c) = \max(a, b, c) = \max(a, \max(b, c)).$$

Elle est également commutative :

$$\forall (a, b) \in \mathbf{N}^2, \quad \max(a, b) = \max(b, a).$$

2. Possède-t-elle un élément neutre ?

Le nombre 0 est l'élément neutre de la loi $*$ dans $\mathbf{N}$:

$$\forall a \in \mathbf{N}, \quad \max(a, 0) = a.$$

3. Soient a, b et c dans $\mathbf{N}$. Si $a * b = a * c$, peut-on en déduire $b = c$?

Prenons $a = 5, b = 1$ et $c = 4$. Alors $\max(a, b) = a$ et $\max(a, c) = a$. Ainsi $a * b = a = a * c$ et pourtant $b \neq c$.

4. Le couple $(\mathbf{N}, *)$ est-il un groupe ?

Si $(\mathbf{N}, *)$ était un groupe on pourrait toujours déduire $b = c$ de $a * b = a * c$. Ce n'est donc pas un groupe.

Soyons plus précis : on a vu que la loi était associative et qu'il y avait un élément neutre. C'est donc la notion d'inverse qui fait défaut. On constate en effet qu'hormis 0, aucun entier n'a d'inverse pour cette loi :

$$\forall a \in \mathbf{N}^*, \forall b \in \mathbf{N}, \max(a, b) \geq a \quad \text{donc} \quad \max(a, b) \neq 0.$$

5. La loi $+$ définie sur $\mathbf{N}$ est distributive par rapport à la loi $*$. Traduire cela mathématiquement et l'illustrer avec un exemple.

Cela se traduit par :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbf{N}^3, \quad a + \max(b, c) = \max(a + b, a + c).$$

Ce résultat est clairement vrai. Reprenons les valeurs de a, b et c précédentes. Alors $a + \max(b, c) = 5 + 4 = 9$ et $\max(a + b, a + c) = \max(6, 9) = 9$. Le résultat est satisfait.

Exercice 3 Tri à bulles

On a démontré que les transpositions engendraient le groupe des permutations. Cela signifie entre autres qu'on est capable de trier une liste d'éléments en n'effectuant que des échanges de deux éléments. On souhaite maintenant le faire en ne s'autorisant que des échanges d'éléments voisins de la liste.

1. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_6$. Écrire σ comme un produit de transpositions.

On peut s'y prendre de plusieurs manières. Si on reprend la méthode vue en cours, on commence par remettre 5 à sa place en l'échangeant avec 2 ; puis on replace 4 en l'échangeant avec 1 ; on échange enfin 3 avec 1. On obtient ainsi $\tau_{1,3}\tau_{1,4}\tau_{2,5}\sigma = id$ et finalement $\sigma = \tau_{2,5}\tau_{1,4}\tau_{1,3}$.

2. Calculer $\sigma_1 = \tau_{2,3}\tau_{3,4}\tau_{4,5}$, puis calculer $\sigma_2 = \tau_{4,5}\tau_{3,4}$. Décrire l'action de ces permutations.

On obtient $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ et $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. La permutation σ_1 fait « tourner » les éléments 2, 3, 4 et 5 : elle envoie 2 à la cinquième place et décale les autres vers la gauche. La permutation σ_2 fait le contraire avec 3, 4 et 5 : elle envoie 5 à la troisième place et décale les autres vers la droite.

3. Calculer $\sigma_2\sigma_1$.

On obtient $\sigma_2\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \tau_{2,5}$. On a ainsi réussi à obtenir la transposition $\tau_{2,5}$ en n'utilisant que des transpositions faisant intervenir des éléments voisins.

4. Généraliser et montrer que toute transposition peut s'écrire comme un produit de transpositions de la forme $\tau_{i,i+1}$.

Soient j et k deux indices avec $k > j$. En généralisant l'exemple précédent, on montre que

$$\tau_{j,k} = \tau_{k-1,k}\tau_{k-2,k-1} \cdots \tau_{j+2,j+1}\tau_{j+1,j+2}\tau_{j,j+1}\tau_{j+1,j+2} \cdots \tau_{k-2,k-1}\tau_{k-1,k}.$$

Le produit $\tau_{j,j+1}\tau_{j+1,j+2} \cdots \tau_{k-2,k-1}\tau_{k-1,k}$ permet de placer k à la place j et de faire glisser tous les indices entre j et $k-1$ vers la droite. Puis le produit $\tau_{k-1,k}\tau_{k-2,k-1} \cdots \tau_{j+2,j+1}\tau_{j+1,j+2}$ permet de mettre j (désormais en place $j+1$) à la place k et de refaire glisser les autres indices vers la gauche, les remettant ainsi à leur place.

Nous avons donc écrit la transposition $\tau_{j,k}$ comme un produit de transpositions de la forme $\tau_{i,i+1}$.

5. En déduire que toute permutation peut s'écrire comme un produit de transpositions de la forme $\tau_{i,i+1}$.

Toute permutation peut s'écrire comme un produit de transpositions. Et chacune de ces transpositions peut elle-même s'écrire comme un produit de transpositions de la forme $\tau_{i,i+1}$. On en déduit que toute permutation peut s'écrire comme un (gros) produit de transpositions de la forme $\tau_{i,i+1}$. Cela signifie en particulier que toute liste d'éléments

peut être remise en ordre en n'utilisant que des échanges d'éléments voisins.

6. Décomposer notre permutation σ en un tel produit.

Reprenons $\sigma = \tau_{2,5}\tau_{1,4}\tau_{1,3}$. Utilisons la formule générale vue plus haut pour décomposer chacune des transpositions :

$$\tau_{2,5} = \tau_{4,5}\tau_{3,4}\tau_{2,3}\tau_{3,4}\tau_{4,5}, \quad \tau_{1,4} = \tau_{3,4}\tau_{2,3}\tau_{1,2}\tau_{2,3}\tau_{3,4}, \quad \tau_{1,3} = \tau_{2,3}\tau_{1,2}\tau_{2,3}.$$

Finalement on obtient

$$\sigma = \tau_{4,5}\tau_{3,4}\tau_{2,3}\tau_{3,4}\tau_{4,5}\tau_{3,4}\tau_{2,3}\tau_{1,2}\tau_{2,3}\tau_{3,4}\tau_{2,3}\tau_{1,2}\tau_{2,3}.$$

Il y a peut-être plus simple mais cela ne saute pas aux yeux.

Le tri à bulles est, on s'en rend bien compte, un algorithme très coûteux en nombre d'opérations et est par conséquent peu utilisé s'il est possible d'échanger autre chose que des élément voisins.