

CONTRÔLE 3

Calculatrice et documents sont interdits.

Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.

Durée de l'épreuve : 1h15.

Le barème est donné à titre indicatif : 10,10.

Exercice 1 Le but de cet exercice est de déterminer et représenter les racines du polynôme

$$P = X^4 + (8 - 8i)X^3 - 48iX^2 - (64 + 64i)X - 60.$$

1. Soit $\omega = 2 - 2i$. Calculer ω^2, ω^3 et ω^4 .
2. On définit l'application φ définie pour $z \in \mathbf{C}$ par $\varphi(z) = e^{-\frac{i\pi}{4}}(z + \omega)$. C'est une isométrie du plan complexe.
Décrire φ géométriquement comme une composée d'isométries élémentaires. Décrire de même sa bijection réciproque φ^{-1} et donner son expression.
3. Soit $z \in \mathbf{C}$. Montrer que z est racine de P si et seulement si $[\varphi(z)]^4 = 4$.
4. Déterminer et représenter $\{Z \in \mathbf{C} \mid Z^4 = 4\}$.
5. En déduire, à l'aide de la question 2, la représentation précise des racines de P .

Exercice 2 Soit p un nombre premier. Le but de cet exercice est de déterminer les racines cubiques de $\bar{1}$ dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Comme $((\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*, +, \times)$ est un corps, on sait que l'équation polynomiale $x^3 = \bar{1}$ a au plus 3 solutions dans $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$.

Nous nous placerons dans le groupe $((\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*, \times)$ et nous considérerons l'application

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^* &\rightarrow (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^* \\ x &\mapsto x^3. \end{aligned}$$

1. Montrer que φ est un morphisme de groupe.
2. Soit x un élément du noyau $\text{Ker}(\varphi)$. Que peut-on dire de l'ordre de x dans le groupe ? Montrer que le cardinal de $\text{Ker}(\varphi)$ est 1 ou 3.
3. En déduire que si $\bar{1}$ a plusieurs racines cubiques dans $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$, alors 3 divise $p - 1$.
4. Démontrons la réciproque de ce résultat. On rappelle que $((\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*, \times)$ est un groupe cyclique :

$$\exists a \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*, \quad (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^* = \langle a \rangle = \{a, a^2, a^3, \dots, a^{p-2}, a^{p-1}\}.$$

Supposons que 3 divise $p - 1$.

Montrer alors que $\bar{1}$ a trois racines cubiques dans $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$.

5. Déterminer le sous-groupe engendré par $\bar{2}$ dans $(\mathbf{Z}/19\mathbf{Z})^*$. Donner les racines cubiques de $\bar{1}$ dans $(\mathbf{Z}/19\mathbf{Z})^*$.
6. Déterminer les racines cubiques de $\bar{1}$ dans $(\mathbf{Z}/23\mathbf{Z})^*$.
7. (Bonus) Déterminer les racines cubiques de $\bar{8}$ dans $(\mathbf{Z}/19\mathbf{Z})^*$. Déterminer les racines cinquièmes de $\bar{1}$ dans $(\mathbf{Z}/11\mathbf{Z})^*$.