Contrôle 2

Documents et calculatrices sont interdits.
Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 *(3 points)*
Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation sur E. Donner la définition de :

$\mathcal{R}$ est antisymétrique.

Donner (sans justification) un exemple de relation antisymétrique.

Exercice 2 *(7 points)*
Soient f et g les fonctions définies par

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

1. Ces fonctions sont-elles injectives, surjectives ?
2. Déterminer les applications $g \circ f$ et $f \circ g$.

Soient maintenant E et F des ensembles. Soient $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, E)$ telles que $g \circ f = Id_E$, c'est-à-dire $\forall x \in E,\ g \circ f(x) = x$.

3. Montrer que f est injective et g surjective.
4. En déduire que si $f \circ g = Id_F$, alors f et g sont bijectives.

Exercice 3 *(4 points)*
Montrer

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 3x - 2y + 7 = 0\} = \{(2\lambda - 1, 3\lambda + 2) \mid \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

Exercice 4 *(6 points)*
Soit p un nombre premier.

1. Soient $\bar{x}$ et $\bar{y}$ dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ tels que $\bar{x}\bar{y} = \bar{0}$.
   Montrer que $\bar{x} = \bar{0}$ ou $\bar{y} = \bar{0}$.
2. En déduire les solutions de $\bar{x}^2 - \bar{4} = \bar{0}$ dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.
3. Quelles sont les solutions de cette équation dans $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$?